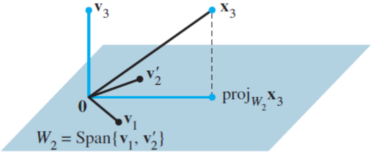
5.3 Μέθοδος Gram-Schmidt

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$. Να κατασκευαστεί ορθογώνια βάση για το W.


v3
x3
v'2
0
proj W2 x3
v1
W2 = Span{v1, v'2}

Θεώρημα (Μέθοδος Gram-Schmidt)

Έστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ *βάση μη μηδενικού υποχώρου* W *του* $\mathbb{R}^n$. *Έστω*

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \dfrac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$
- $\dots$
- $\mathbf{v}_r = \mathbf{x}_r - \dfrac{\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \dots - \dfrac{\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{v}_{r-1}}{\mathbf{v}_{r-1} \cdot \mathbf{v}_{r-1}}\mathbf{v}_{r-1}$

Τότε το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ *είναι ορθογώνια βάση του* W *κι επιπλέον* $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ *για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant r$.

Παράδειγμα

Να εφαρμοστεί η μέθοδος Gram-Schmidt στα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.