

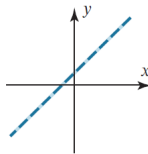
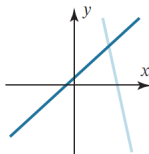
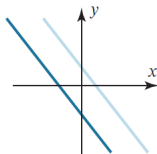
Κεφάλαιο 1 - Γραμμικά συστήματα και Πίνακες

1.1 Γραμμικά συστήματα

Υπενθύμιση:

Ένα σύστημα της μορφής
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 παριστάνει ένα ζεύγος ευθειών στο επίπεδο.

Λύση του συστήματος \leftrightarrow σημείο τομής των ευθειών



Θα γενικεύσουμε προς δύο κατευθύνσεις:

- θεωρώντας περισσότερες μεταβλητές
- βρίσκοντας γενικές μεθόδους επίλυσης

Ορισμός

Μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ και x_1, x_2, \dots, x_n άγνωστοι, λέγεται **γραμμική εξίσωση**.

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις

- $x + 3y = 7$
- $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
- $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

είναι γραμμικές.

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις

- $x + 3y^2 = 4$
- $\sin x + y = 0$
- $\sqrt{x} + y = 0$

είναι μη γραμμικές.

Ορισμός

Ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών εξισώσεων λέγεται **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** ή απλά **γραμμικό σύστημα**.

Γενική μορφή γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Ορισμός

Λύση ενός γραμμικού συστήματος ονομάζεται μια ακολουθία αριθμών s_1, s_2, \dots, s_n ώστε η αντικατάσταση

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$$

να ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

Ένα σύστημα λέγεται **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μία λύση.

Παράδειγμα

Το σύστημα

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

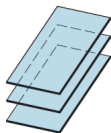
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

έχει λύση $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$.

Γεωμετρική διαίσθηση:

Σύστημα $2 \times 2 \leftrightarrow$ δύο ευθείες στο επίπεδο

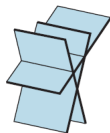
Σύστημα $3 \times 3 \leftrightarrow$ τρία επίπεδα στο χώρο



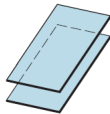
No solutions
(three parallel planes;
no common intersection)



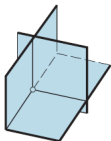
No solutions
(two parallel planes;
no common intersection)



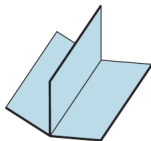
No solutions
(no common intersection)



No solutions
(two coincident planes
parallel to the third;
no common intersection)



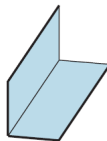
One solution
(intersection is a point)



Infinitely many solutions
(intersection is a line)



Infinitely many solutions
(planes are all coincident;
intersection is a plane)



Infinitely many solutions
(two coincident planes;
intersection is a line)

Εφόσον μόνο οι συντελεστές των αγνώστων σχετίζονται με τις λύσεις του συστήματος, τους συγκεντρώνουμε σε έναν πίνακα.

Ορισμός

Έστω ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Ο **επαυξημένος πίνακας** του γραμμικού συστήματος είναι ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Οι αλγεβρικές πράξεις που επιτρέπονται σε ένα γραμμικό σύστημα, μεταφράζονται σε πράξεις μεταξύ γραμμών του επαυξημένου πίνακα - **γραμμοπράξεις**.

Εναλλαγή δύο εξισώσεων \leftrightarrow Εναλλαγή δύο γραμμών

Πολλαπλασιασμός μίας εξίσωσης με σταθερά $\neq 0$ \leftrightarrow Πολλαπλασιασμός μίας γραμμής με σταθερά $\neq 0$

Πρόσθεση ενός πολλαπλασίου μίας εξίσωσης σε μία άλλη \leftrightarrow Πρόσθεση πολλαπλασίου μίας γραμμής σε μία άλλη

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε γραμμικό σύστημα ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- Υπάρχει μοναδική λύση.
- Υπάρχουν άπειρες λύσεις.
- Δεν υπάρχει λύση.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\2x + y &= 6\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$4x - 2y = 1$$

$$16x - 8y = 4$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\3x + 3y &= 6\end{aligned}$$