1.2 Πίνακες και Πράξεις Πινάκων

Ορισμός

Ένας **πίνακας** είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών, οι οποίοι λέγονται **στοιχεία** του πίνακα.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες λέγεται $m \times n$ πίνακας. Τα m, n λέγονται **διαστάσεις** του πίνακα.

Συμβολισμός: $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία.
Αντίστοιχα ορίζονται τα $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$ και $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Τα στοιχεία ενός πίνακα A συμβολίζονται με a_{ij}

$$a_{ij} = \text{στοιχείο στην } i \text{ γραμμή και } j \text{ στήλη}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Γράφουμε $A = (a_{ij})$ ή $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Ορισμός

Ένας πίνακας $n \times n$ λέγεται **τετραγωνικός**. Η κύρια διαγώνιος τετραγωνικού πίνακα αποτελείται από στοιχεία της μορφής a_{ii}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ορισμός

Δύο πίνακες είναι **ίσοι** όταν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και ίσα στοιχεία, δηλαδή για $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ για κάθε } i, j.$$

Παράδειγμα

Για ποιες τιμές του x ισχύει $A = B$ και $A = C$;

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Πράξεις Πινάκων

1. Πρόσθεση κι αφαίρεση: προσθέτουμε/αφαιρούμε στοιχείο προς στοιχείο.

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A - B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

Γίνεται μόνο σε πίνακες με ίδιες διαστάσεις.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Πράξεις Πινάκων

2. Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα (**βαθμωτός πολλαπλασιασμός**): πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου με τον αριθμό.

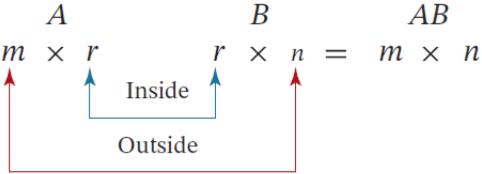
$$cA = (ca_{ij}) \quad (c \in \mathbb{R})$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Πολλαπλασιαμός πινάκων

Δύο πίνακες $m_1 \times n_1$ και $m_2 \times n_2$ πολλαπλασιάζονται μόνο όταν $n_1 = m_2$ και το γινόμενο τους είναι πίνακας $m_1 \times n_2$.



Για να βρούμε το στοιχείο ij του γινομένου πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της i γραμμής του πρώτου πίνακα με τα στοιχεία της j στήλης του δεύτερου πίνακα και προσθέτουμε (εσωτερικό γινόμενο).

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες πράξεων

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(c) $A(BC) = (AB)C$

(d) $A(B + C) = AB + AC$

(e) $(B + C)A = BA + CA$

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Να γίνει επαλήθευση της ιδιότητας $(AB)C = A(BC)$.

Παρατηρήσεις

Έστω δύο πίνακες A, B.

1. Είναι πιθανόν ο AB να ορίζεται και ο BA να μην ορίζεται.
2. Είναι πιθανόν οι AB, BA να ορίζονται αλλά να έχουν διαφορετικές διαστάσεις.
3. Είναι πιθανόν οι AB, BA να ορίζονται, να έχουν ίδιες διαστάσεις αλλά να μην είναι ίσοι.

Ορισμός

Μηδενικός πίνακας: $\mathbb{O} = \mathbb{O}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

Ορισμός

Ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας: τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία κυρίας διαγωνίου ίσα με 1 και κάθε άλλο στοιχείο ίσο με 0.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Ιδιότητες

1. $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
2. $A - \mathbb{O} = A$
3. $A - A = A + (-A) = \mathbb{O}$
4. $\mathbb{O}A = \mathbb{O}$
5. Αν $\lambda A = \mathbb{O}$ τότε $\lambda = 0$ ή $A = \mathbb{O}$
6. $IA = AI = A$

Παρατήρηση

Είναι πιθανόν $A \neq \mathbb{O}$ και $B \neq \mathbb{O}$ αλλά $AB = \mathbb{O}$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$