Κεφάλαιο 2 - Επίλυση γραμμικών συστημάτων

2.1 Μέθοδος απαλοιφής

Στόχος του κεφαλαίου είναι να μάθουμε να λύνουμε τυχαία γραμμικά συστήματα.

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
$$

Θα μας απασχολήσουν δύο ερωτήματα

1. Ύπαρξη: υπάρχει τουλάχιστον μία λύση για το σύστημα;
2. Μοναδικότητα: αν υπάρχει λύση, είναι μοναδική;

Θεώρημα

Για κάθε γραμμικό σύστημα ισχύει μία ακριβώς από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

1. *Δεν υπάρχει καμία λύση.*
2. *Υπάρχει μοναδική λύση.*
3. *Υπάρχουν άπειρες λύσεις.*

Το θεώρημα θα αποδειχθεί στο τέλος του κεφαλαίου και στα επόμενα κεφάλαια θα εξερευνήσουμε γιατί ισχύουν μόνο αυτά τα τρία σενάρια.

Ορισμός

- **Σύνολο λύσεων** είναι το σύνολο των ακολουθιών $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ώστε η αντικατάσταση $x_1 = s_1$, ..., $x_n = s_n$ να ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του συστήματος.
- Το σύστημα λέγεται **συμβιβαστό** αν υπάρχει τουλάχιστον μία λύση.
- Το σύστημα λέγεται **ομογενές** αν $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}$$

Κάθε ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό γιατί έχει λύση $(0, 0, \ldots, 0)$ η οποία λέγεται **τετριμμένη λύση**.

Ορισμός

- Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

  λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του γραμμικού συστήματος.
- Δύο συστήματα είναι **ισοδύναμα** αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Είδαμε ότι οι πράξεις μεταξύ εξισώσεων ενός γραμμικούς συστήματος αντιστοιχούν σε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα. Άρα οι γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα δεν επηρεάζουν το σύνολο λύσεων του συστήματος.
Αυτό μας οδηγεί στην πρώτη μέθοδο επίλυσης.

Μέθοδος απαλοιφής

Η λύση μέσω απαλοιφής γίνεται μετατρέποντας τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε

- κλιμακωτό (απαλοιφή Gauss) ή
- ανηγμένο κλιμακωτό (απαλοιφή Gauss-Jordan)

και κάνοντας πίσω αντικατάσταση, δηλαδή σχηματίζουμε τις εξισώσεις με βάση τον πίνακα και βρίσκουμε τις λύσεις (αν υπάρχουν).

Παράδειγμα

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\
2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\
 & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\
2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6
\end{array}
$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad\qquad - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Όταν έχουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα γραμμικού συστήματος, οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε ηγετικό 1 λέγονται **ηγετικές μεταβλητές** ενώ οι υπόλοιπες λέγονται **ελεύθερες μεταβλητές**.

Παράδειγμα

Βρείτε ποιες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές (αν υπάρχουν) στα προηγούμενα συστήματα.

Θεώρημα

Έστω ότι ο A είναι επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

1. *Αν υπάρχει γραμμή του A της μορφής $[0\ 0\ \ldots\ 0|b]$ τότε το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό και αντιστρόφως.*
2. *Αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση και δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές (δηλαδή τα ηγετικά 1 είναι όσα και οι μεταβλητές) τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.*
3. *Αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση και υπάρχει ελεύθερη μεταβλητή (δηλαδή τα ηγετικά 1 είναι λιγότερα από ότι οι μεταβλητές) τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που εκφράζονται παραμετρικά.*

Παράδειγμα

Οι παρακάτω πίνακες προέκυψαν εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις σε επαυξημένους πίνακες γραμμικών συστημάτων. Τι συμπεραίνετε για τις λύσεις τους·

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σε ένα ομογενές σύστημα δεν θα προκύψει πότε γραμμή της μορφής $[0\ 0\ \ldots\ 0|b]$. Άρα έχουμε το παρακάτω συμπέρασμα.

Θεώρημα

Αν ένα ομογενές σύστημα έχει παραπάνω αγνώστους από ότι εξισώσεις τότε έχει άπειρες λύσεις.