

## 2.2 Μέθοδος Αντιστρόφου Πίνακα

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Έστω το γραμμικό σύστημα:

Ορίζουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

↑  
**πίνακας του συστήματος**

Τότε το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στην μορφή

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Αν ο  $A$  είναι τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας, τότε:

$$\begin{aligned}Ax &= \mathbf{b} \Rightarrow \\A^{-1}Ax &= A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \\x &= A^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

### Θεώρημα (Μέθοδος Αντιστρόφου Πίνακα)

Αν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας τότε το γραμμικό σύστημα  $Ax = \mathbf{b}$  έχει μοναδική λύση  $x = A^{-1}\mathbf{b}$ .

## Παράδειγμα

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:  $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$

$$x_1 + 8x_3 = 17$$

## Θεώρημα (Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν  $n \times n$  τετραγωνικό πίνακα  $A$ .

- (I) Ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος.
- (II) Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του  $A$  είναι ο  $I_n$ .
- (III) Ο  $A$  γράφεται σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.
- (IV) Το ομογενές γραμμικό σύστημα  $Ax = \mathbf{0}$  έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη).
- (V) Το γραμμικό σύστημα  $Ax = \mathbf{b}$  έχει μοναδική λύση για κάθε  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  (την  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ ).

## Θεώρημα (Πλήθος λύσεων γραμμικών συστημάτων)

*Κάθε γραμμικό σύστημα έχει καμία, ακριβώς μία ή άπειρες λύσεις.*

Απόδειξη: