3.2 Ορίζουσα με απαλοιφή

Θεώρημα

Αν ο τετραγωνικός πίνακας A περιέχει μία γραμμή ή στήλη με μηδενικά, τότε $\det A = 0$.

Απόδειξη:

Θεώρημα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A, $\det A = \det A^T$.

Απόδειξη:

Θεώρημα

Έστω τετραγωνικός πίνακας A.

1. *Αν ο B προκύπτει από πολλαπλασιασμό γραμμής ή στήλης του A με $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, τότε* $\det B = \lambda \det A$.
2. *Αν ο B προκύπτει από εναλλαγή δύο γραμμών ή στηλών του A, τότε* $\det B = -\det A$.
3. *Αν ο B προκύπτει από πρόσθεση πολλαπλασίου μίας γραμμής ή στήλης του A σε άλλη γραμμή ή στήλη, τότε* $\det B = \det A$.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = k \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = \det(A)$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Θεώρημα

Αν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει δύο γραμμές ή στήλες που είναι πολλαπλάσιο η μία της άλλης, τότε $\det A = 0$.

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Θεώρημα

Έστω οι $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες A, B.

1. $\det(kA) = k^n \det A$
2. *Αν οι πίνακες A, B διαφέρουν μόνο σε μία γραμμή ή στήλη τότε* $\det(A + B) = \det A + \det B$.
3. $\det(AB) = \det A \det B$

Δεν ισχύει γενικά η ιδιότητα $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$. Επιπλέον, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Να ελεχθεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα (Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

(I) *Ο A είναι αντιστρέψιμος.*

(XV) $\det A \neq 0$.

Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$