Κεφάλαιο 4 - Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

Διανυσματικοί χώροι

Ορισμός

Έστω μη κενό σύνολο V στο οποίο έχουμε ορίσει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με πραγματικούς αριθμούς. Το V λέγεται **διανυσματικός χώρος** αν ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα για κάθε $u, v, w \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. Υπάρχει στοιχείο $\mathbb{O} \in V$ ώστε $\mathbb{O} + u = u + \mathbb{O} = u$.
4. Για κάθε $u \in V$ υπάρχει $-u \in V$ ώστε $u + (-u) = (-u) + u = \mathbb{O}$.
5. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
7. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
8. $1u = u$

Παράδειγμα

Τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί χώροι με τις συνήθεις πράξεις:

- Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία.
- Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ των διανυσμάτων του επιπέδου.
- Το σύνολο $\mathbb{R}^3$ των διανυσμάτων του χώρου.
- Το σύνολο $\{\mathbb{O}\}$ (μηδενικός διανυσματικός χώρος).

Ορισμός

Ορίζουμε για $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\mathbb{R}^n$ με στοιχεία της μορφής $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, όπου $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$.

Συμβολισμός: $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \vec{u} = \mathbf{u} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$

Ορίζουμε επίσης:

- $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + t_1 \\ s_2 + t_2 \\ \vdots \\ s_n + t_n \end{pmatrix}$
- $\lambda \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda s_1 \\ \lambda s_2 \\ \vdots \\ \lambda s_n \end{pmatrix} \; (\lambda \in \mathbb{R})$

Θεώρημα

Το $\mathbb{R}^n$ με τις παραπάνω πράξεις είναι διανυσματικός χώρος.

Λόγω του θεωρήματος, αποκαλούμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ διανύσματα.

Ορισμός

Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots \lambda_m \mathbf{v}_m$$

λέγεται **γραμμικός συνδυασμός των** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Επίσης λέμε ότι το y **παράγεται** (spanned) από τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Παράδειγμα

Στον $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Στον $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Στον $\mathbb{R}^n$: Έστω $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ορισμός

Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ λέγεται ο **παραγόμενος χώρος των** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ και συμβολίζεται με $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$.

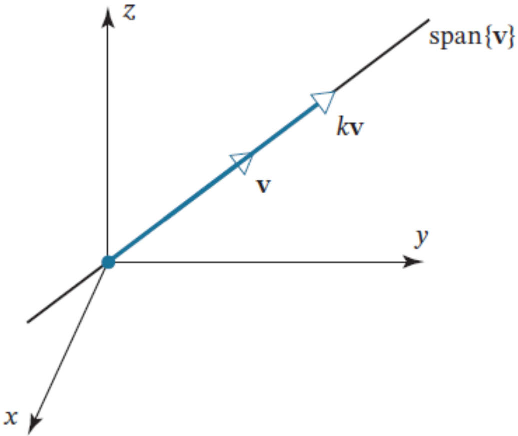
$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{v}_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

Παράδειγμα

Τι συμπεραίνετε από τα προηγούμενα παραδείγματα σε σχέση με το σύνολο Span;

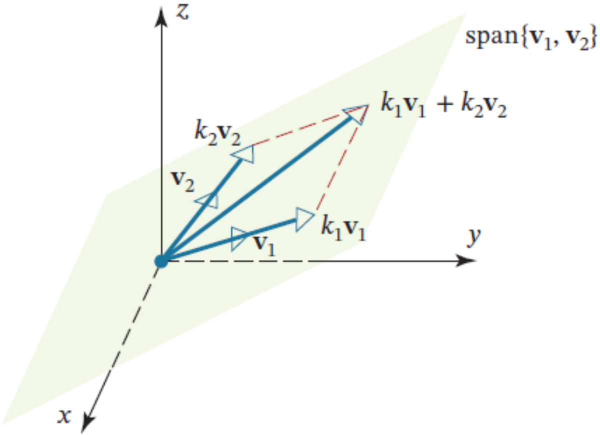
Γεωμετρική ερμηνεία

Αν $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\text{Span}\{\mathbf{v}\} = \{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Αυτό το σύνολο εκφράζει μια ευθεία που διέρχεται από το O και είναι παράλληλη στο $\mathbf{v}$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$. Αυτό το σύνολο εκφράζει το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που ορίζουν τα v_1, v_2 (λόγω κανόνα παραλληλογράμμου).



Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Να ελέγξετε αν $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, όπου $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να ελέγξετε αν $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, όπου $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Θεώρημα

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

1. *Το* $\mathbf{w}$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$.
2. $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$
3. *Το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα* $\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_m & \mathbf{w} \end{array}\right)$ *είναι συμβιβαστό.*

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ όπου $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να ελέγξετε αν

$$\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3.$$

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Για ποιες τιμές του h ισχύει $\mathbf{y} \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$;

Παρατήρηση

Αν A είναι $m \times n$ πίνακας και $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, τότε το γινόμενο $A\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.