

Ορισμός

Έστω $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ ένα υποσύνολο διανυσματικού χώρου V . Το S λέγεται **βάση** του V αν

- 1 $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\} = V$
- 2 Τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Οι βάσεις λειτουργούν ως συστήματα συντεταγμένων.

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Το σύνολο $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ είναι βάση του \mathbb{R}^n και ονομάζεται **κανονική βάση**.

Παράδειγμα

Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 .

Εφόσον μια βάση παράγει ολόκληρο τον διανυσματικό χώρο V , κάθε διάνυσμα του V γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης.

Θεώρημα

Αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου V τότε κάθε $\mathbf{b} \in V$ γράφεται με **μοναδικό** τρόπο ως

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ονομάζονται **συντεταγμένες** του \mathbf{b} ως προς την βάση S .

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ ως προς την βάση

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Θεώρημα

Έστω $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ βάση ενός διανυσματικού χώρου V .

- Κάθε υποσύνολο του V με περισσότερα από m διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένο.
- Κάθε υποσύνολο του V με λιγότερα από m διανύσματα δεν παράγει τον χώρο V .

Συνεπώς, κάθε βάση έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ορισμός

Το πλήθος στοιχείων μιας οποιασδήποτε βάση ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται διάσταση του V και συμβολίζεται με $\dim(V)$.

Παράδειγμα

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Παράδειγμα

Αν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $\dim(\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}) = n$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί η διάσταση του μηδενικού χώρου του A , δηλαδή το $\dim(\text{Nul}(A))$.