Τάξη και μηδενικότητα πίνακα

Ορισμός

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας.

- Η **τάξη/βαθμός** του A, συμβολίζεται με $\operatorname{rank}(A)$ και είναι η διάσταση του χώρου στηλών του A, δηλαδή $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Col}(A))$.
- Η **μηδενικότητα** του A, συμβολίζεται με $\operatorname{nullity}(A)$ και είναι η διάσταση του μηδενικού χώρου του A, δηλαδή $\operatorname{nullity}(A) = \dim(\operatorname{Nul}(A))$.

Θεώρημα

Αν ο A είναι σε κλιμακωτή μορφή, τότε οι στήλες του A που περιέχουν ηγετικό 1 αποτελούν βάση για τον χώρο στηλών του A.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπενθύμιση: Ισοδύναμοι πίνακες δεν έχουν απαραίτητα τον ίδιο χώρο στηλών.

Θεώρημα

Αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι και ορισμένες στήλες του A αποτελούν βάση για τον χώρο στηλών του, τότε οι αντίστοιχες στήλες του B αποτελούν βάση για τον χώρο στηλών του.

Σύμφωνα με το θεώρημα, αν μετατρέψουμε έναν πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, μπορούμε να εντοπίσουμε ποιες στήλες θα παράγουν τον χώρο στηλών του.

Παράδειγμα

Να βρεθει η τάξη του πίνακα $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

- Να βρεθεί μία βάση του $\mathrm{Nul}(A)$ και η διάσταση του.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

- Να βρεθεί μία βάση του $\mathrm{Col}(A)$ και η διάσταση του.

Θεώρημα (Θεώρημα Τάξης Πίνακα)

Για κάθε $m \times n$ πίνακα A,

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = n.$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Να γίνει επαλήθευση του θεωρήματος τάξης πίνακα για τον

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχει η γενική λύση του ομογενούς $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$, όπου A ένας 5×7 πίνακας με τάξη 3.

Θεώρημα

Αν το $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους και ο A έχει τάξη r, τότε η γενική λύση του συστήματος περιέχει $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές.

Θεώρημα (Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

(I) *Ο A είναι αντιστρέψιμος.*

(II) *Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n.*

(III) *Ο A γράφεται σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.*

(IV) *Το ομογενές γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη).*

(V) *Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (την $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$).*

(VI) *Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

(VII) *Οι στήλες του A παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$.*

(VIII) *Οι στήλες του A αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα (Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

(I) *Ο A είναι αντιστρέψιμος.*

(IX) $\mathrm{rank}(A) = n$

(X) $\mathrm{nullity}(A) = 0$

(XI) *Υπάρχει πίνακας B ώστε $BA = I$.*

(XII) *Υπάρχει πίνακας B ώστε $AB = I$.*