Κεφάλαιο 5 - Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα και Διαγωνοποίηση

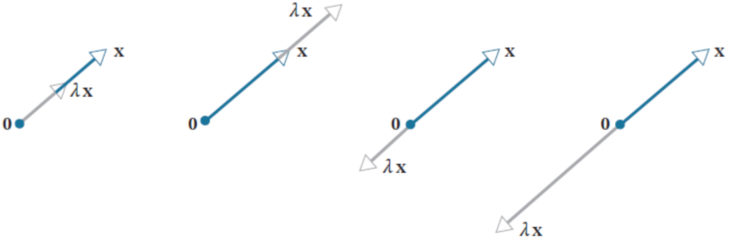
5.1 Ιδιοτιμές κι ιδιοδιανύσματα

Ορισμός

Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας, ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** του A αν το $A\mathbf{x}$ είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{x}$, δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Το λ λέγεται **ιδιοτιμή** του A και το $\mathbf{x}$ **ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή** λ.



(a) $0 \le \lambda \le 1$ **(b)** $\lambda \ge 1$ **(c)** $-1 \le \lambda \le 0$ **(d)** $\lambda \le -1$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα

Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας, το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

*Η εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$ λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του A.*

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Η ορίζουσα $\det(A - \lambda I)$ δίνει πάντα πολυώνυμο της μορφής

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0),$$

το οποίο λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί πόσες ιδιοτιμές μπορεί να έχει ένας $n \times n$ πίνακας A.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$.

Θεώρημα

Αν ο A είναι $n \times n$ τριγωνικός πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του A είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 5 & -8 & -1/4 \end{pmatrix}$.

Θεώρημα

Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. *Το λ είναι ιδιοτιμή του A.*
2. *Το λ είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$.*
3. *Το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbb{O}$ έχει μη τετριμμένες λύσεις.*
4. *Υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*

Αν έχουμε βρει ότι το λ είναι ιδιοτιμή του A, οι μη τετριμμένες λύσεις του ομογενούς $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbb{O}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο λ.

Ορισμός

Αν το λ είναι ιδιοτιμή του A, ο **ιδιοχώρος** που αντιστοιχεί στο λ είναι ο χώρος $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ κι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι τους.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ κι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι τους.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.

Απόδειξη:

Θεώρημα

Αν $v_1, v_2, \ldots, v_r$ είναι ιδιοδιανύσματα πίνακα A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, τότε το $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη:

Ορισμός

Αν το λ_0 είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A, η **αλγεβρική πολλαπλότητα** του λ_0, $\pi(\lambda_0)$, είναι η δύναμη με την οποία εμφανίζεται ο παράγοντας $(\lambda - \lambda_0)$ στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Παράδειγμα

Έστω τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα και οι αλγεβρικές πολλαπλότητες τους.

Θεώρημα

Έστω τετραγωνικός πίνακας A με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

- $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
- $\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

Απόδειξη:

Θεώρημα

Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι ίδιες με του A^T.

Απόδειξη:

Θεώρημα

Αν ο $n \times n$ πίνακας A έχει n διακριτές ιδιοτιμές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα κι οι ιδιοχώροι του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα κι οι ιδιοχώροι του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$