# 5.2 Διαγωνοποίηση

**Ορισμός**

Αν $A, B$ είναι δύο $n \times n$ πίνακες, λέμε ότι ο $A$ είναι **όμοιος** με τον $B$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P$ ώστε

$$A = PBP^{-1}.$$

Παρατήρηση: Αν ο $A$ είναι όμοιος με τον $B$ τότε κι ο $B$ είναι όμοιος με τον $A$.

# Ιδιότητες

### Θεώρημα

*Αν οι $A, B$ είναι όμοιοι $n \times n$ πίνακες, τότε* $\det A = \det B$.

Απόδειξη:

# Ιδιότητες

## Θεώρημα

*Αν οι $A, B$ είναι όμοιοι $n \times n$ πίνακες, τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες.*

Απόδειξη:

## Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A$ λέγεται **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

## Θεώρημα

*Για έναν $n \times n$ πίνακα $A$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος.*
2. *Ο $A$ έχει $n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

*Αν $A = PDP^{-1}$ όπου $D$ διαγώνιος πίνακας, τότε οι στήλες του $P$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $A$ και τα στοιχεία του $D$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του $A$.*

# Απόδειξη

## Θεώρημα

*Ένας $n \times n$ πίνακας με $n$ διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Απόδειξη:

## Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

## Παράδειγμα

Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

## Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

### Θεώρημα

*Αν ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος με $A = PDP^{-1}$, τότε $A^k = PD^kP^{-1}$ για κάθε ακέραιο $k \geqslant 0$.*

Απόδειξη:

## Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο $A^{13}$.

Υπενθύμιση: Αν το $\lambda_0$ είναι ιδιοτιμή του $A$, η αλγεβρική πολλαπλότητα του $\lambda_0$ είναι η δύναμη του παράγοντα $(\lambda - \lambda_0)$ στην εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$.

### Ορισμός

Έστω $A$ τετραγωνικός πίνακας και $\lambda_0$ ιδιοτιμή του $A$. Η **γεωμετρική πολλαπλότητα** του $\lambda_0$, $\gamma(\lambda_0)$, είναι η διάσταση του ιδιοχώρου $E_{\lambda_0} = \mathrm{Nul}(A - \lambda_0 I)$.

### Θεώρημα

*Έστω $A$ ένας $n \times n$ πίνακας.*

1. *Για κάθε ιδιοτιμή του $A$, η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας.*
2. *Ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του $A$ είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα.*
3. *Ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το άθροισμα των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών του $A$ είναι ίσο με $n$.*

## Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.