5.3 Μιγαδικές ιδιοτιμές

Για την εύρεση ιδιοτιμών καταλήγουμε σε εύρεση ριζών πολυωνύμων της μορφής

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)$$

Δεν έχουν όλα τα πολυωνύμα πραγματικές ρίζες (π.χ. $p(x) = x^2 + 1$) Αν όμως χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς αριθμούς ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει n μιγαδικές ρίζες (πιθανόν με πολλαπλότητες).

- Ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{C}^n$ ως το σύνολο των στοιχείων $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

  όπου $v_i \in \mathbb{C}$.
- Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός με μιγαδικό αριθμό ορίζονται όπως και στο $\mathbb{R}^n$.
- Αν $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{pmatrix}$ τότε,

$$\mathrm{Re}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ \mathrm{Im}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 i \\ a_2 - b_2 i \\ \vdots \\ a_n - b_n i \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα ορίζουμε πίνακες με μιγαδικά στοιχεία

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο $\bar{A}$ και η ορίζουσα του A.

Ιδιότητες

Έστω $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, A πίνακας με μιγαδικά στοιχεία, $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. $\bar{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{u}$
2. $\overline{\lambda \mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}}$
3. $\overline{\mathbf{u} \pm \mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} \pm \bar{\mathbf{v}}$
4. $\bar{\bar{A}} = A$
5. $\bar{A^T} = (\bar{A})^T$
6. $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

Οι έννοιες των διανυσματικών χώρων όπως

- γραμμικοί συνδυασμοί,
- γραμμική ανεξαρτησία,
- υπόχωροι και βάσεις

ορίζονται με τον ίδιο τρόπο για το $\mathbb{C}^n$, με την μόνη διαφορά ότι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός χρησιμοποιεί $\lambda \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα

Έστω A τετραγωνικός πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Αν το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A με $\mathbf{x}$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε το $\bar{\lambda}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\bar{\mathbf{x}}$.

Απόδειξη:

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα

Έστω ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *όπου* $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$. *Οι ιδιοτιμές του* C *είναι οι* $\lambda = a \pm bi$ *και ο πίνακας γράφεται ως*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

όπου ϕ *το όρισμα του μιγαδικού αριθμού* $a + bi$.

Απόδειξη:

Θεώρημα

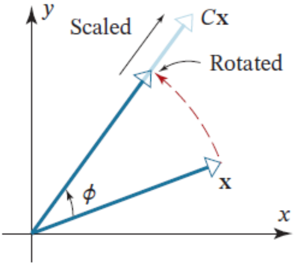
Έστω A ένας 2×2 πίνακας με πραγματικά στοιχεία με ιδιοτιμές $\lambda = a \pm bi$ $(b \neq 0)$. Αν το $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = a - bi$ και $P = [\mathrm{Re}(\mathbf{x})\ \mathrm{Im}(\mathbf{x})]$, τότε ο P είναι αντιστρέψιμος και

$$A = P \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

Από το θεώρημα προκύπτει ότι κάθε 2×2 πίνακας με μιγαδικές ιδιοτιμές είναι όμοιος με πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ αντιστοιχεί σε γραμμική απεικόνιση που στρέφει κατά γωνία ϕ και μεταβάλλει το μήκος κατά $|\lambda|$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν $A = P \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P^{-1}$ τότε η απεικόνιση με πίνακα τον A περιγράφεται ως εξής:

1. Αλλαγή βάσης μέσω του αντιστρέψιμου πίνακα P^{-1}
2. Επιμήκυνση και περιστροφή σύμφωνα με τον πίνακα C
3. Αλλαγή βάσης στις συνήθεις συντεταγμένες

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \longrightarrow & A\mathbf{x} = PCP^{-1}\mathbf{x} \\ \downarrow & & \uparrow \\ P^{-1}\mathbf{x} & \longrightarrow & CP^{-1}\mathbf{x} \end{array}$$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν πίνακες P και C της μορφής $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ώστε να ισχύει $A = PCP^{-1}$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν πίνακες P και C της μορφής $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ώστε να ισχύει $A = PCP^{-1}$.

Παράδειγμα

Έστω $A = P \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. Να βρεθούν θετικός ακέραιος k και $h \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A^k = hI$.