The true size of real numbers

and other mysteries of the continuum function

Stamatis Dimopoulos

University of Cyprus

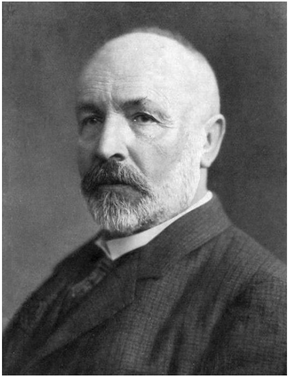
27 November 2019

Θέωρημα (Gödel-1938 & Cohen-1963)

Τα αξιώματα των μαθηματικών δεν μπορούν να αποφασίσουν για το ακριβές μέγεθος των πραγματικών αριθμών.

- Τι σημαίνει αυτό;
- Πώς σχετίζεται η θεωρία συνόλων με αυτό το πρόβλημα;
- Ποια σχετικά προβλήματα μελετάμε σήμερα;

I: Πληθικότητα απείρων συνόλων και ανεξαρτησία



Georg Cantor 1845-1918

Μεγέθη άπειρων συνόλων

Συγκρίνουμε την πληθικότητα με συναρτήσεις:

1. $|X| \leqslant |Y| \Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ 1-1.
2. $|X| = |Y| \Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ 1-1 και επί.
3. $|X| < |Y| \Leftrightarrow |X| \leqslant |Y|$ και $|X| \neq |Y|$.

Στόχος: Να βρεθεί ιεραρχία συνόλων που να περιέχει όλους τους πιθανούς πληθαρίθμους άπειρων συνόλων (ότι είναι οι πεπερασμένοι αριθμοί για τα πεπερασμένα σύνολα).

Μέγεθος άπειρων συνόλων

Βασική αρχή: Το πιο μικρό άπειρο σύνολο είναι το $\mathbb{N}$.

Θέωρημα (Cantor)

1. *Για κάθε άπειρο σύνολο* X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.
2. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Ερώτηση

$$|\mathbb{N}| <? < |\mathbb{R}|$$

Μεγέθη άπειρων συνόλων

Από τη μελέτη του Cantor προέκυψαν δύο ιεραρχίες.

$\aleph$-ιεραρχία

Ξεκινάει με $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \ldots < \aleph_\omega < \ldots$$

Θέωρημα

Κάθε άπειρο σύνολο έχει πληθικότητα ίση με κάποιον αριθμό $\aleph$.

Μεγέθη άπειρων συνόλων

$\beth$-ιεραρχία

- Ξεκινάει με $\beth_0 = \omega = \mathbb{N}$.
- $\beth_1$ είναι η πληθικότητα του $\mathcal{P}(\beth_0)$ κ.ο.κ.
- $|\mathbb{R}| = \beth_1$

$$\beth_0 < \beth_1 < \ldots < \beth_\omega < \ldots$$

Μεγέθη άπειρων συνόλων

Για ένα πληθάριθμο κ συμβολίζουμε

$$2^\kappa = \left|\mathcal{P}(\kappa)\right|$$

Ορισμός

Η συνάρτηση $\alpha \mapsto 2^\alpha$ λέγεται συνάρτηση του συνεχούς.

π.χ. $\left|\mathbb{R}\right| = 2^{\aleph_0} = \beth_1$.

Μεγέθη άπειρων συνόλων

$$\begin{array}{ccccccccc} \aleph_0 & < & \aleph_1 & < & \ldots & < & \aleph_\omega & < & \ldots \\ \| & & ? & & & & & & \\ \beth_0 & < & \beth_1 & < & \ldots & < & \beth_\omega & < & \ldots \end{array}$$

Άρα:

1. Προσδιορισμός του μεγέθους των πραγματικών αριθμών $\Leftrightarrow$
2. Σύγκριση των δύο ιεραρχιών.

Ορισμός

Υπόθεση του συνεχούς: $|\mathbb{R}| = \beth_1 = \aleph_1$.

Αποδείξεις στα μαθηματικά

$$\underbrace{\text{Αξιώματα} \; + \; \text{Κανόνες απόδειξης}}_{\Downarrow}$$
$$\text{Θεωρήματα}$$

Ερώτηση (Θεωρία συνόλων αρχές 20ού αιώνα)

Ποια αξιώματα χρησιμοποιούμε για όλα τα μαθηματικά;

Zermelo & Fraenkel: Αξιωματικό σύστημα ZFC

Αποδείξεις στα μαθηματικά

Τι σημαίνει ότι μια πρόταση είναι αληθής/αποδείξιμη;

Σημασιολογία	Σύνταξη
Τιμή αληθείας	Απόδειξη
Εξαρτάται από το μοντέλο	Εξαρτάται από τους κανόνες απόδειξης

- Συνήθως σκεπτόμαστε σημασιολογικά $\rightarrow$ μοντέλα
- Μοντέλο των μαθηματικών $=$ σύνολο ή κλάση που ικανοποιεί τα αξιώματα ZFC.

Αποδείξεις στα μαθηματικά

Θέωρημα (Πληρότητας, Gödel 1929)

Αν μια πρόταση είναι αληθής τότε είναι αποδείξιμη και αντιστρόφως.

Παράδειγμα:

- Αν σε κάθε μοντέλο των μαθηματικών ισχύει η ισότητα $\beth_1 = \aleph_1$ θα πρέπει να υπάρχει και μια απόδειξή της.
- Αν υπάρχει απόδειξη για την πρόταση $\aleph_1 = \beth_1$ τότε είναι αληθής σε κάθε μοντέλο των μαθηματικών.

Αποδείξεις στα μαθηματικά

Θέωρημα (2ο μη πληρότητας, Gödel 1931)

Οποιοδήποτε συνεπές σύστημα αξιωμάτων συνεπάγεται βασικούς κανόνες αριθμητικής δεν μπορεί να αποδείξει την συνέπειά του.

Συνέπειες:

- Δεν μπορούμε από τα αξιώματα ZFC να αποδείξουμε την ύπαρξη μοντέλου για το ZFC.
- Η ύπαρξη μοντέλων των μαθηματικών γίνεται είτε μεταθεωρητικά είτε με σχετική συνέπεια.

Αποδείξεις στα μαθηματικά

Πώς μοιάζει ένα μοντέλο των μαθηματικών;

- $V_0 = \varnothing$
- $V_1 = \mathcal{P}(V_0)$
- $V_2 = \mathcal{P}(V_1)$
- $\ldots$
- Σε οριακές περιπτώσεις θεωρούμε την ένωση.

Χρησιμοποιούμε την κλάση $V = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ ως μοντέλο του ZFC.

Ανεξαρτησία στα μαθηματικά

Θέωρημα (Gödel 1938)

Υπάρχει μοντέλο των μαθηματικών στο οποίο η πρόταση $\aleph_1 = \beth_1$ είναι αληθής.

Θέωρημα (Cohen 1963)

Υπάρχει μοντέλο των μαθηματικών στο οποίο η πρόταση $\aleph_1 = \beth_1$ είναι ψευδής. Επιπλέον, για κάθε επιτρεπτό πληθάριθμο κ, υπάρχει μοντέλο των μαθηματικών στο οποίο $\beth_1 = \kappa$.

Συμπέρασμα: Η πρόταση $\aleph_1 = \beth_1$ είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα ZFC.

Ανεξαρτησία στα μαθηματικά

- Υπάρχουν μαθηματικές προτάσεις που είναι ανεξάρτητες.
- Θεωρία συνόλων τέλη 20ού αιώνα: μελέτη των μοντέλων των μαθηματικών.

Ερώτηση 1

Υπάρχουν αξιώματα που αν τα προσθέσουμε στο ZFC θα προσδιορίζουν το μέγεθος των πραγματικών αριθμών;

Ερώτηση 2

Υπάρχει τρόπος να ‘μετρήσουμε’ την ανεξαρτησία;

II: Μεγάλοι πληθάριθμοι

Felix Hausdorff 1868-1942

Μεγάλοι πληθάριθμοι

Τι είναι οι μεγάλοι πληθάριθμοι;

1. σύνολα που η ύπαρξή τους είναι ανεξάρτητη από το ZFC
2. γενικεύουν ιδιότητες μικρών πληθαρίθμων όπως το $\omega = \mathbb{N}$
3. ‘μονάδες μέτρησης’ ανεξαρτησίας

Μεγάλοι πληθάριθμοι

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \ldots$$

Διακρίσεις άπειρων πληθαρίθμων:

1. Διάδοχοι (successor) ή Οριακοί (limit)
   π.χ. $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_{\omega+1}$ — π.χ. $\aleph_\omega$
2. Μη ιδιάζοντες (regular) ή Ιδιάζοντες (singular)
   π.χ. $\aleph_0$, $\aleph_1$ — π.χ. $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+\omega}$

- Όλοι οι διαδοχικοί πληθάριθμοι είναι regular.
- Το $\aleph_0$ είναι οριακός και regular.

Ερώτηση

Υπάρχει υπεραριθμήσιμος οριακός πληθάριθμος που είναι regular;

Μεγάλοι πληθάριθμοι

Ορισμός

Ένας πληθάριθμος κ λέγεται απρόσιτος (inaccessible) αν είναι οριακός και regular.

Θέωρημα

Αν ο κ είναι inaccessible τότε το V_κ είναι μοντέλο του ZFC. Άρα η ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων είναι ανεξάρτητη από το ZFC.

Οι πιο πολλοί μεγάλοι πληθάριθμοι προκύπτουν από παρόμοιες γενικεύσεις ιδιοτήτων του ω.

Μεγάλοι πληθάριθμοι

Ιδιότητα του ω: Υπάρχει μέτρο στο $\mathcal{P}(\omega)$.

Θέωρημα

Αν υπάρχει δίτιμο μέτρο κλειστό με $< \kappa$-προσθετικότητα στο $\mathcal{P}(\kappa)$ για κάποιον πληθάριθμο κ, τότε ο κ είναι inaccessible πληθάριθμος και όριο inaccessible πληθαρίθμων.

Ορισμός

Ένας πληθάριθμος κ με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται μετρήσιμος (measurable).

Μεγάλοι πληθάριθμοι

Ιδιότητα του ω: Κάθε φίλτρο μπορεί να επεκταθεί σε ένα υπερφίλτρο.

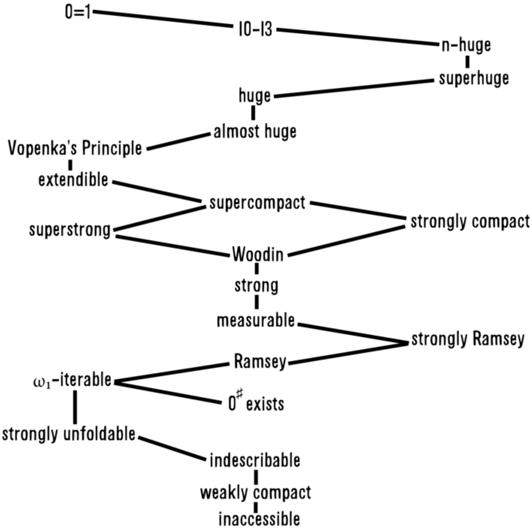
Θέωρημα

Αν κάθε φίλτρο κλειστό ως προς $< \kappa$-τομές μπορεί να επεκταθεί σε ένα υπερφίλτρο κλειστό ως προς $< \kappa$-τομές, τότε ο κ είναι measurable πληθάριθμος και όριο measurable πληθαρίθμων.

Ορισμός

Ένας πληθάριθμος κ με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται ισχυρά συμπαγής (strongly compact).

Μεγάλοι πληθάριθμοι



Μεγάλοι πληθάριθμοι

Γιατί χρησιμοποιούμε μεγάλους πληθαρίθμους;

[...] large cardinal axioms—axioms of infinity that assert that there are very large levels of the hierarchy of types—and he went so far as to entertain a generalized completeness theorem for such axioms, according to which all statements of set theory could be settled by such axioms.

Gödel, Kurt, 1946, "Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics," in Gödel 1990, 150–153.

Μεγάλοι πληθάριθμοι

Γιατί χρησιμοποιούμε μεγάλους πληθαρίθμους;

Θέωρημα (Solovay, 1970)

Η ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμου συνεπάγεται την ύπαρξη μοντέλου των μαθηματικών στο οποίο κάθε σύνολο πραγματικών αριθμών είναι Lebesgue μετρήσιμο και αντιστρόφως.

Οι μεγάλοι πληθάριθμοι μας δίνουν πληροφορίες για γνωστά σύνολα όπως αυτό των πραγματικών αριθμών!

Μεγάλοι πληθάριθμοι

Μας βοηθήσανε οι μεγάλοι πληθάριθμοι να προσδιορίσουμε το μέγεθος των πραγματικών αριθμών;

Ναι και όχι.

- Όχι διότι κάνενας μεγάλος πληθάριθμος που έχουμε βρει μέχρι σήμερα δεν συνεπάγεται απευθείας κάποια συγκεκριμένη τιμή για το $|\mathbb{R}|$.
- Ναι, διότι έχουμε βρει άλλους τύπους αξιωμάτων οι οποίοι προσδιορίζουν την τιμή του $|\mathbb{R}|$ και είναι ισοδύναμοι με την ύπαρξη μεγάλων πληθαρίθμων.

Επόμενο βήμα: Μελέτη των μοντέλων στα οποία ελέγχουμε τη συνάρτηση του συνεχούς.

III: Η συνάρτηση του συνεχούς

Saharon Shelah 1945 - Present

Η συνάρτηση του συνεχούς

Ερώτηση

Πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση του συνεχούς στα διάφορα μοντέλα του ZFC;

Θέωρημα (Easton, 1970)

Έστω F μια συνάρτηση στους πληθαρίθμους με τις ιδιότητες:

1. $\alpha < F(\alpha)$
2. $\alpha < \beta \to F(\alpha) \leqslant F(\beta)$
3. *το $F(\alpha)$ δεν μπορεί να είναι α-ένωση μικρών πληθαρίθμων.*

Τότε υπάρχει μοντέλο των μαθηματικών στο οποίο η συνάρτηση του συνεχούς στους regular πληθαρίθμους ταυτίζεται με την F.

Στο μοντέλο αυτό, $2^{\kappa} = \kappa^{+}$ για singular πληθαρίθμους κ.

Η συνάρτηση του συνεχούς

Στους singular πληθαρίθμους η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη.

Θέωρημα (Silver, 1974)

Αν κ singular πληθάριθμος και $2^\alpha = \alpha^+$ για κάθε $\alpha < \kappa$, τότε $2^\kappa = \kappa^+$.

Θέωρημα (Mitchell-1984, Gitik-1991)

Η ύπαρξη μοντέλων των μαθηματικών με $2^\kappa > \kappa^+$ για singular πληθαρίθμους κ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μετρήσιμων πληθαρίθμων με μη-τετριμμενη τάξη Mitchell (δηλαδή είναι ανεξάρτητο από το ZFC).

Η συνάρτηση του συνεχούς

Εξερεύνηση της συνάρτησης του συνεχούς

$\updownarrow$

Θεωρία μεγάλων πληθαρίθμων

Ερώτηση

Τι συμπεριφορά μπορεί να έχει η συνάρτηση του συνεχούς υποθέτοντας την ύπαρξη μεγάλων πληθαρίθμων;

Η συνάρτηση του συνεχούς

Εξερεύνηση της συνάρτησης του συνεχούς
$\updownarrow$
Θεωρία μεγάλων πληθαρίθμων

Ερώτηση

Τι συμπεριφορά μπορεί να έχει η συνάρτηση του συνεχούς υποθέτοντας την ύπαρξη μεγάλων πληθαρίθμων;

Ευχαριστώ!