3.3 Μέθοδος Cramer και γεωμετρικές εφαρμογές

Θεώρημα

Αν $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *είναι γραμμικό σύστημα με* A *έναν* $n \times n$ *πίνακα με* $\det A \neq 0$, *τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

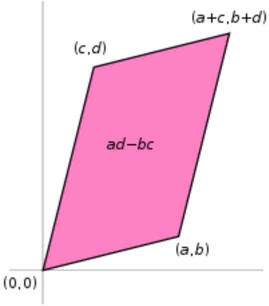
όπου A_i *είναι ο πίνακας που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την* i *στήλη του* A *με* $\mathbf{b}$.

Παράδειγμα

Να λυθεί με τη μέθοδο Cramer το σύστημα
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Γεωμετρικές εφαρμογές - I

Αν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$, τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι ίσο με $|\det A|$ όπου $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix}$.

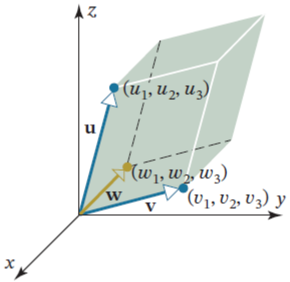


Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές $(-2-2), (0,3), (4,-1), (6,4)$.

Γεωμετρικές εφαρμογές - ΙΙ

Αν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι ίσος με $|\det A|$, όπου $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$.



Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u} = (2, -6, 2), \mathbf{v} = (0, 4, -2), \mathbf{w} = (2, 2, -4)$.

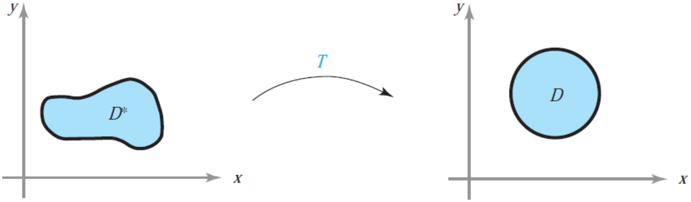
Γεωμετρικές εφαρμογές - III

- Έστω $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση με κανονικό πίνακα A. Αν S είναι χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\text{Εμβαδόν } T(S) = |\det A| \text{ Εμβαδόν } S$$

- Έστω $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με κανονικό πίνακα A. Αν S είναι χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ τότε

$$\text{Όγκος } T(S) = |\det A| \text{ Όγκος } S$$



Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0.$