Κεφάλαιο 2 - Στοιχεία Πιθανοτήτων και Συνδυαστικής

Θεωρία πιθανοτήτων → πειράματα τύχης δηλ.
οι συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνεται το πείραμα δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα

π.χ ρίψη ζαριού /νομίσματος , τράπουλα

Στην Στατιστική : βαθμός φοιτητή σε ένα μάθημα
αριθμός γεννήσεων σε μια μέρα

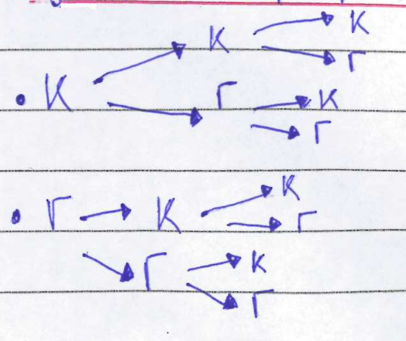
Πείραμα τύχης = Πείραμα
Δειγματικός χώρος = σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος. (S)

κάθε δυνατό αποτέλεσμα = Απλό γεγονός
Ενδεχόμενο ή Γεγονός : σύνολο απλών γεγονότων

π.χ ρίψη ενός ζαριού: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
"έρχεται αριθμός μεγαλύτερος του 4" = $\{5,6\}$

π.χ ρίψη ενός νομίσματος : $S = \{Κ, Γ\}$
"έρχεται κορώνα" = $\{Κ\}$

Ρίψη τριών νομισμάτων

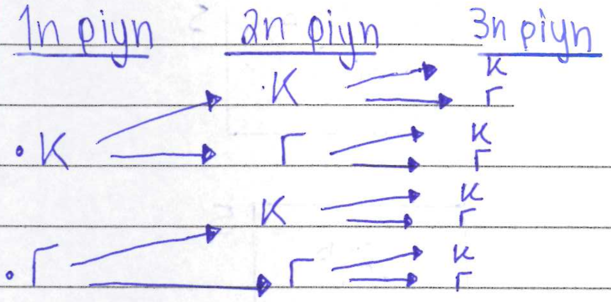


⇒ ΚΚΚ
ΚΚΓ
ΚΓΚ
ΚΓΓ
ΓΚΚ
ΓΚΓ
ΓΓΚ
ΓΓΓ

Συνέχεια μαθήματος

- Πείραμα (τύχης)
- Δειγματικός χώρος (S)
- Απλά γεγονότα
- Ενδεχόμενα ή γεγονότα

Παραδ. 1



S: κκκ, κκγ, κγκ, κγγ, γκκ, γκγ, γγκ, γγγ

Α: έρχεται 2 φορές κορώνα

$A = \{κκκ, κκγ, κγκ, γκκ\}$

παραδ. 2

Μια εταιρία εκτελεί πτήσεις από τα αεροδρόμια Λάρνακας και Πάφου προς τα αεροδρόμια Μαλδίβες, Βρυξέλλες, Σεβίλλη

Επιλέγουμε τυχαία μια πτήση

Πίνακας Διπλής Εισόδου

Αφετηρία \ Προορισμός	Β	Μ	Σ
(Λ) Λάρνακα	ΛΒ	ΛΜ	ΛΣ
(Π) Πάφος	ΠΒ	ΠΜ	ΠΣ

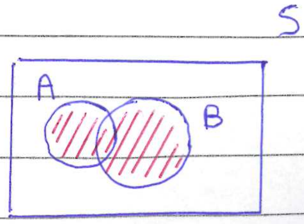
(S)

Α: η πτήση καταλήγει στις Βρυξέλλες

$\Rightarrow A = \{ΛΒ, ΠΒ\}$

Πράξεις Συνόλων (ενδεχομένων)

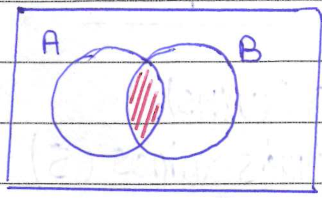
1) Ένωση $A \cup B$



- Να συμβεί το Α ή το Β
- Να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β

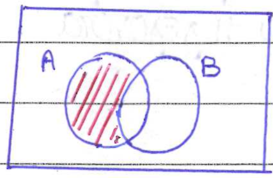
2) Τομή $A \cap B$

- Να συμβεί το A και το B
- Να συμβούν ταυτόχρονα τα A και B



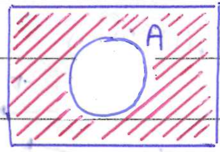
3) Διαφορά $A-B$

- Να συμβεί το A και όχι το B



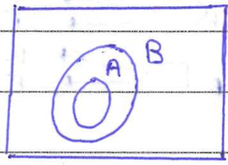
4) Συμπλήρωμα A' (ή $\bar{A}$ ή A^c)

- Να μην συμβεί το A



5) Υποσύνολο $A \subseteq B$

- Το ενδεχόμενο B περιλαμβάνει το ενδεχόμενο A



* Αν $A \cap B = \emptyset$ => τα A, B λέγονται ξένα ενδεχόμενα

π.χ ρίψη 3 νομισμάτων

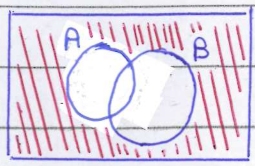
A: Έρχεται τουλ. 1 φορά κορώνα: => A = {κκκ, κγγ, κγκ, κγγ, γκκ, γκγ, γγκ}
B: έρχεται 2 φορές κορώνα: => B = {κκκ, κκγ, κγκ, γκκ}
Γ: έρχεται 3 φορές γράμματα

=> $B \subseteq A$
=> $A \cap \Gamma = \emptyset$
=> $B \cap \Gamma = \emptyset$

Νόμος De Morgan

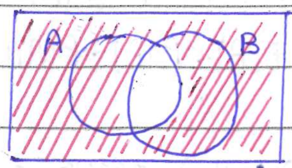
$(A \cup B)' = A' \cap B'$

S



$(A \cap B)' = A' \cup B'$

S



(όλα εκτός την τομή)

Κλασική Πιθανότητα

S: Δειγμ. χώρος
A: ενδεχόμενο

$P(A) = \dfrac{\text{Αριθμός απλών γεγονότων στο A}}{\text{Συνολικός αριθμός απλών γεγονότων}} = \dfrac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{όλες τις περιπτώσεις}}$

<u>π.χ</u> ρίψη 3 κερμάτων
A: έρχεται 2 φορές κορώνα. $\Rightarrow P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Αξιώματα Πιθανότητας

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(S) = 1$
3) Αν A, B είναι ξένα $(A \cap B = \emptyset)$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
[Γενικότερα, αν $A_1, A_2 \dots A_\nu$ είναι ξένα ανά δύο τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$]

$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_\nu)$

Ιδιότητες πιθανοτήτων

1) $P(A') = 1 - P(A)$
2) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

παράδειγμα: A, B ενδεχόμενα ενός δειγμ. χώρου S

• $P(A) = \frac{3}{4}$ • $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$ • $P(A \cap B) = \frac{9}{20}$

Να βρεθεί η πιθανότητα

α) Να πραγματοποιηθεί το B
β) Να " " μόνο το B
γ) Να μην " κανένα από τα 2 ενδεχόμενα

α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{9}{10} + \frac{9}{20} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{12}{20}}$

β) $B \cap A' = B - A$
$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{20} - \frac{9}{20} = \boxed{\frac{3}{20}}$

γ) $A' \cap B'$
$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{9}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$

Παράδειγμα: $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
Τυχαία επιλογή ενός αριθμού

$A = \{$ πολ/σια του 2 $\}$ Να βρεθούν: A', $A \cup B$, $A \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cup \Gamma$, $P(A')$
$B = \{$ πολ/σια του 4 $\}$ $P(A \cup B)$, $P(A \cap \Gamma)$
$\Gamma = \{$ πολ/σια του 5 $\}$

$A' = \{1,3,5,7,9\}$
$A \cup B = \{2,4,6,8,10\} = A \quad (B \subseteq A)$
* $(A \cup \Gamma) = \{2,4,5,6,8,10\}$
$A \cap \Gamma = \{10\}$
$(A \cap B) \cup \Gamma = \{4,8\} \cup \Gamma = \{4,5,8,10\}$
$P(A') = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap \Gamma) = \underline{1}$

$$P(A \cap \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cup \Gamma) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$$

Παράδειγμα

Σε ένα σύνολο 50 δευτεροετών φοιτητών του ΠΚ, 40 έχουν περάσει Στατιστ. 2
• Η πιθανότητα να έχουν περάσει Στατ. 1 είναι 0,4
• » » » » » τουλ. ένα από τα 2 είναι 0,9

Διαλέγουμε τυχαία έναν φοιτητή. Ποια είναι η πιθανότητα:

α) Να έχει περάσει και τα 2
β) έχει κοπεί και στα 2
γ) έχει περάσει ακριβώς ένα από τα 2
δ) έχει κοπεί το πολύ σε ένα μάθημα

A: Έχει περάσει στατ. 1
B: Έχει περάσει στατ. 2

α) $P(A \cap B) = ;$ $P(A) = 0,4$, $P(B) = \frac{40}{50} = 0,8$, $P(A \cup B) = 0,9$

• $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$= 0,4 + 0,8 - 0,9 = \boxed{0,3}$

β) $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = \boxed{0,1}$

γ) $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,9 - 0,3 = \boxed{0,6}$

δ) έχει κόπεί το πολύ σε ένα μάθημα *
= έχει περάσει ακριβώς 1 ή ακριβώς 2 $= 0,6 + 0,3 = \boxed{0,9}$

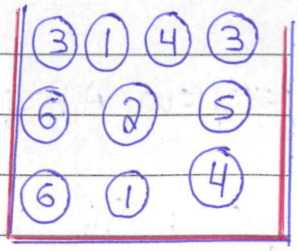
ή 1 - να μην πέρασε κανένα $= 1 - 0,1 = \boxed{0,9}$

Πιθανότητες
Δειγμ. χώρος
Απλά γεγονότα
Ενδεχόμενα
$P(A) = \frac{\#\text{ απλών γεγονότων στο } A}{\#\text{ απλών γεγονότων}}$

Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία

Παράδειγμα

- Έστω κάλπη με αριθμημένα σφαιρίδια
- Επιλέγουμε τυχαία ένα



A: Επιλέγουμε άρτιο αριθμό

B: Επιλέγουμε αριθμό μεγαλύτερο του 2

$P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{7}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$

Θέλουμε:

P(Επιλέγουμε άρτιο αριθμό δεδομένου ότι ο αριθμος που επιλέχθηκε ειναι μεγαλυτ. του 2)

$= \boxed{P(A/B)}$

Συρρικνώνεται ο δειγματικός χώρος και γίνεται ίσος με B $P(A/B) = \frac{4}{7}$

παρατηρούμε ότι $\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Ορισμός: Η πιθανότητα του A δεδομένου του B είναι $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Ιδιότητες

1) $0 \leq P(A/B) \leq 1$
2) $P(B/B) = 1$
3) Αν A_1, A_2 ξένα ενδεχόμενα: $P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$
4) $P(A'/B) = 1 - P(A/B)$

Πολλαπλασιαστικός νόμος

$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B)$ ή $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$

Τα ενδεχόμενα A, B λέγονται ανεξάρτητα αν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Παρατήρηση : Την ανεξαρτησία την ελέγχουμε πάντα από τον ορισμό

π.χ : Εχουμε τράπουλα 52 φύλλων και επιλέγουμε τυχαία ένα.

A: το φύλλο είναι άσος
B: το φύλλο είναι πίκα
Γ: το φύλλο είναι φιγούρα

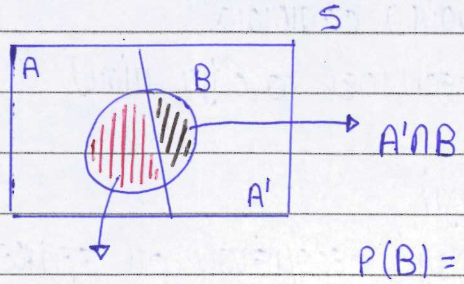
$P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52}$, $P(\Gamma) = \frac{12}{52}$, $P(A\cap B) = \frac{1}{52}$, $P(A\cap\Gamma) = 0$
$P(B\cap\Gamma) = 3/52$

* $P(A)\cdot P(B) = \frac{4}{52}\cdot\frac{13}{52} = \frac{1}{52} = P(A\cap B)$ => A, B είναι ανεξάρτητα

* $P(A)\cdot P(\Gamma) = \frac{4}{52}\cdot\frac{12}{52} \neq 0 \neq P(A\cap\Gamma)$ => A, Γ δεν είναι ανεξάρτητα

* $P(B)\cdot P(\Gamma) = \frac{13}{52}\cdot\frac{12}{52} = \frac{3}{52} = P(B\cap\Gamma)$ => ανεξάρτητα

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας



$$P(B) = P(A\cap B) + P(A'\cap B)$$
$$= P(A)P(B/A) + P(A')P(B/A')$$

Θεώρημα Bayes

$$P(A/B) = \left(\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\right) = \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)} \xRightarrow{\text{ΘΟΠ}} \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(A')P(B/A')}$$

<u>παράδειγμα</u>

-Έστω δύο κουτιά, το ένα περιέχει 10 λαμπτήρες εκ των οποίων 4 είναι ελαττωματικοί, το δεύτερο περιέχει 12 λαμπτήρες εκ των οποίων 3 ελαττωματ Επιλέγουμε στην τύχη ένα κουτί και έναν λαμπτήρα από αυτό.
Ποια είναι η πιθανότητα αν ο λαμπτήρας να είναι ελαττωματικός να προήλθε από το κουτί 1;

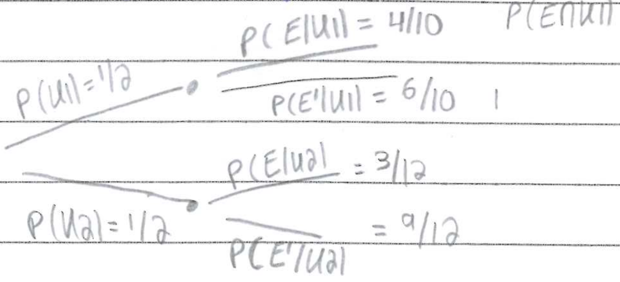
E: ο λαμπτήρας είναι ελαττωματικός K_1: ο λαμπτήρας προέρχεται από το κουτί 1

Ψάχνουμε $P(K_1/E)$

Από θεώρημα Bayes: $P(K_1/E) = \dfrac{P(K_1)\cdot P(E/K_1)}{P(E)} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}}{13/40} = \boxed{\dfrac{8}{13}}$

- $P(E/K_1) = 4/10$
- $P(E) = P(K_1)\cdot P(E/K_1) + P(K_2)\cdot P(E/K_2)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{12} = \frac{13}{40}$$



Π.Χ

Έστω κάλπη με 3 άσπρα και 22 μαύρα σφαιρίδια

Επιλέγουμε 2 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση (δεν τα βάζω πίσω)

• Να βρεθούν:

α) P εξαγωγής άσπρου στην 2η εξαγωγή

β) P εξαγ. άσπρου στην 1η εξαγωγή δεδομένου ότι εξήχθει άσπρο στην 2η

α) A: εξαγωγή άσπρου στην 1η εξαγωγή

B: " " " στην 2η "

Από Θ.Ο.Π

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') = \frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24} + \frac{22}{25}\cdot\frac{3}{24} = \boxed{\frac{3}{25}}$$

β) Ψάχνουμε P(A|B)

Από θεώρημα Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24}}{3/25} = \boxed{\frac{2}{24}}$$

Προηγούμενο μάθημα

• Δεσμευμένη πιθανότητα

• Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

• Θεώρημα Bayes

Αρχές Απαρίθμησης (Συνδυαστική)

Κανόνας αθροίσματος

- μ τρόπους για το A
- ν τρόπους για το B
- A και B δεν γίνονται ταυτόχρονα

$\mu+\nu$ τρόπους για το A ή B

• Αν ένα πείραμα περιλαμβάνει 2 περιπτώσεις εκ των οποίων η μια γίνεται με μ τρόπους και η άλλη με ν τρόπους, τότε το πείραμα γίνεται με $\mu+\nu$ τρόπους

π.χ

Το τμήμα ΟΙΚ θέλει να επιλέξει έναν εκπρόσωπο μεταξύ 20 καθηγητ. και 180 φοιτητών *

=> Από τον κανόνα αθροίσματος έχουμε $20+180=\boxed{200}$ πιθανές επιλογές

* Πόσες πιθανές επιλογές εκπροσώπου έχει το τμήμα;

Κανόνας του Πολλαπλασιασμού

- μ τρόπους για το A
- ν τρόπους για το B
- A και B γίνονται ταυτόχρονα

=> $\mu\cdot\nu$ τρόπους για το $A\cdot B$

Αν ένα πείραμα γίνεται σε δύο στάδια εκ των οποίων το 1 γίνεται με μ τρόπους και το άλλο γίνεται με ν τρόπους, τότε το πείραμα γίνεται με $\mu\cdot\nu$ τρόπους

π.χ

Μια πτέρυγα του ΠΚ αποτελείται από 1 αριθμό και 1 γράμμα. Πόσες πιθανές ονομασίες για πτέρυγες υπάρχουν;

=> Από τον κανόνα του πολ/σμού $24\cdot10=\boxed{240}$ (1ο στάδιο → 24 επιλογές, 2ο στάδιο → 10 επιλογές)

Παρατηρήσεις

1) Μπορούν να υπάρξουν περισσότερες περιπτώσεις ή στάδια

π.χ Αριθμοί κυκλοφορίας

1ο στάδιο → 24 επιλογές
2ο στάδιο → 24 επιλογές
3ο " → 24 "
4ο στάδιο → 10 επιλογές
5ο " → 10 "
6ο " → 10 "

Από τον κανόνα πολ/σμού υπάρχουν $24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 24^3 \cdot 10^3$ πιθανοί αριθμοί κυκλοφορίας

2) Οι κανόνες μπορούν να συνδυαστούν

π.χ
Μια πτέρυγα του ΠΚ αποτελείται από (ένα γράμμα) ή (ενα γράμμα και ένα ψηφίο)
Πόσες είναι οι πιθανές πτέρυγες;

1 γράμμα → 24 επιλογές
ή
1 γράμμα + ένα ψηφίο $\xrightarrow{\text{κανον. πολ/σμού}}$ $24 \cdot 10 = 240$ επιλογές

Από κανόνα αθροίσματος: $24+240$ πιθανές ονομασίες

Υποθέτουμε ότι έχουμε δειγματικό χώρο με N αντικείμενα και επιλέγουμε δείγμα (δειγματοληψία) μεγέθους ρ.
$(1 \leq \rho \leq N)$

Πιθανές συνθήκες
- Επανάθεση ή όχι
- Διάταξη ή όχι

1) Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση με διάταξη.
Έχουμε $N \cdot (N-1)(N-2) \dots (N-\rho+1)$ πιθανά δείγματα

διότι 1ο στάδιο → N επιλογές
2ο στάδιο → $N-1$ επιλογές
⋮
ρ στάδιο → $N-(\rho-1) = N-\rho+1$ επιλογές

Κανόνας Πολ/σμού

$N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-\rho+1)$ επιλογές

Παράδειγμα: Εχουμε ένα δοχείο με 3 σφαιρίδια: κόκκινο (Κ), πράσινο (Π), μπλέ (Μ)

Επιλέγουμε 2 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση με διάταξη ($N=3$, $\rho=2$)

Από τον τύπο: $3\cdot 2 = 6$ πιθανά δείγματα: (ΚΠ)(ΚΜ)(ΠΚ)(ΠΜ)(ΜΚ)(ΜΠ)

2) Δειγματοληψία με επανάθεση + διάταξη

Εχουμε N^ρ πιθανά δείγματα

διότι 1ο στάδιο → N επιλογές
2ο στάδιο → N επιλογές
⋮
ρ στάδιο → N επιλογές

Κανόνας Πολ/σμού

$\underbrace{N\cdot N\cdot N\ldots N}_{\rho}$ επιλογές

παράδειγμα

Κ Π
Μ

ε Επιλέγουμε 2 με επανάθεση και διάταξη

$3^2 = 9$ πιθανά δείγματα

(Κ,Κ) (Κ,Π) (Κ,Μ)
(Π,Κ) (Π,Π), (Π,Μ)
(Μ,Κ) (Μ,Π) (Μ,Μ)

3) Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση χωρίς διάταξη

Έχουμε $\binom{N}{\rho} = \frac{N!}{\rho!(N-\rho)!}$ πιθανά δείγματα

Π.χ

Κ Π
Μ

Επιλέγουμε 2 χωρίς επανάθεση χωρίς διάταξη

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2\cdot1} = 3$ πιθανά δείγματα (ΚΠ)(ΚΜ)(ΠΜ)

Παράδειγμα

Δίνονται οι αριθμοί 1, 3, 5, 7, 9

α) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας καθένα από τα ψηφία όσες φορές θέλουμε;

(Επανάθεση, διάταξη, $N=5$, $\rho=3$) $5^3=125$

β) Πόσους 3ψήφιους μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας το κάθε ψηφίο το πολύ μία φορά;

(Χωρίς επανάθεση, διάταξη, $N=5$, $\rho=3$, $N-3+1=3$) $\Rightarrow$ $5\cdot4\cdot3=60$

γ) Πόσα σύνολα τριών στοιχείων μπορούμε να σχηματίσουμε με τους αριθμούς αυτούς;

(Χωρίς επανάθεση, χωρίς διάταξη) $N=5$, $\rho=3$

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!}$

Παράδειγμα

Από έναν πάγκο με 16 αθλητες επιλέγουμε 11 για έναν αγώνα. Πόσες πιθανές 11άδες υπάρχουν;

(χωρίς επανάθεση, χωρίς διάταξη) $\binom{16}{11} = \frac{16!}{11!(16-11)!} = \frac{16!}{11!\,5!}$

Παράδειγμα

Καταθέτουμε ένα δελτίο Τζόκερ. Ποια η πιθανότητα να κερδίσουμε

Τζόκερ: 5 αριθμοί : 1-45
1 τζόκερ : 1-20

Επιλογή 5 αριθμών: χωρίς διάταξη
χωρίς επανάθεση $\binom{45}{5}$

Από Πολλαπλασιαστικό κανόνα: Εχουμε $\binom{45}{5} \cdot 20$ πιθανές εξάδες

=> Πιθανότητες νίκης $\frac{1}{\binom{45}{5} \cdot 20}$

Είδαμε:

Αρχές Απαρίθμησης
Κανόνας Αθροίσματος
Κανόνας Πολ/σμου
Δειγματοληψία → μέγεθος δείγματος

Εκλογή δείγματος ρ αντικειμένων από Ν χωρίς επανάθεση με διάταξη
$N(N-1)\cdots(N-\rho+1)$
Αν $\rho = N$, τότε έχουμε τις μεταθέσεις Ν αντικειμένων και έχουμε
$N(N-1)\cdots 2\cdot 1 = N!$ πιθανά δείγματα

Πρόβλημα των γενεθλίων

• Έχουμε μια τάξη 25 μαθητών και καταγράφουμε την ημέρα των γενεθλίων τους. Ποια είναι η πιθανότητα δυο μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα;

Για απλούστευση: Το έτος έχει 365 ημέρες και η πιθανότητα γέννησης σε κάθε μέρα είναι η ίδια.

Δειγμ. χώρος: Επιλογή 25 ημερών (από 365) με επανάθεση + διάταξη
$\Rightarrow 365^{25}$ επιλογές

Α: Δύο μαθητές έχουν την ίδια μέρα γενέθλια (επιλογή 25 ημερών από 365 με επανάθεση και διάταξη που δύο είναι ίδιες)

Α' : Κανένας μαθητής δεν έχει την ίδια μέρα γενέθλια με τον άλλον (επιλογή 25 ημερών από 365 χωρίς επανάθεση και με διάταξη)
$\rightarrow 365 \cdot 364 \ldots (365-24)$ επιλογές

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{365 \cdot 364 \ldots (365-24)}{365^{25}} \boxed{\simeq 0,57}$$