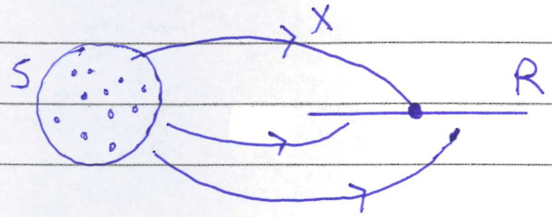
Κεφάλαιο 3 - Κατανομή Πιθανότητας Τυχαίων Μεταβλητών

Ορισμός: Τυχαία μεταβλητή X λέγεται μια συνάρτηση με Πεδίο Ορισμού τον δειγματικό χώρο S και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών



π.χ. Επιλέγουμε έναν από τους διψήφιους αριθμούς από το σύνολο:
$\{15, 24, 32, 45, 50, 60\}$

X: Το άθροισμα των ψηφίων του επιλεγόμενου αριθμού

Αποτελέσματα του πειράματος	Τιμή της X	Πιθανότητα
15, 24, 60	6	3/6 → νούμερα
32, 50	5	2/6
45	9	1/6

κατανομή πιθανότητας

Τυχαίες μεταβλητές με κεφαλαία $X, Y, Z, X_1, X_2 \ldots$
Τιμές των μεταβλητών με μικρά $x, y, z, x_1, x_2 \ldots$
Τυχαίες μεταβλητές: - Διακριτές → Προς το παρόν
- Συνεχείς μόνο διακριτές

Η μελέτη της κατανομής πιθανότητας γίνεται με δύο συναρτήσεις

1) Συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f_X(x)$ ή $f(x)$
2) Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = F(x)$

Συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$

Στο προηγ. παράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} 3/6 & , x = 6 \\ 2/6 & , x = 5 \\ 1/6 & , x = 9 \end{cases}$

Ιδιότητες

1) $f(x_i) \geq 0$
2) $\sum_{x_i \in S} f(x_i) = 1$
3) $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$

Παράδειγμα

Ρίψη 2 ζαριών
X: άθροισμα ενδείξεων των ζαριών

Αποτελέσματα	Τιμή της X	Πιθανότητα
(1,1)	2	1/36
(1,2) (2,1)	3	2/36
(1,3) (2,2) (3,1)	4	3/36
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	5	4/36
⋮	⋮	⋮
(5,6) (6,5)	11	2/36
(6,6)	12	1/36

$$f(x) = \begin{cases} 1/36 & x = 2 \text{ ή } 12 \\ 2/36 & x = 3 \text{ ή } 11 \\ 3/36 & x = 4 \text{ ή } 10 \\ 4/36 & x = 5 \text{ ή } 9 \\ 5/36 & x = 6 \text{ ή } 8 \\ 6/36 & x = 7 \end{cases}$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

παράδειγμα: Ρίψη 3 νομισμάτων
X: αριθμός εμφανίσεων "γράμματα"

Αποτέλεσμα	Τιμή της X	Πιθανότητα
κκκ	0	1/8
γκκ, κγκ, κκγ	1	3/8
κγγ, γκγ, γγκ	2	3/8
γγγ	3	1/8

$$f(x) = \begin{cases} 1/8, & x=0 \text{ ή } x=3 \\ 3/8, & x=1 \text{ ή } x=2 \end{cases}$$

$F(0) = P(X \leq 0) = P(X=0) = 1/8$

$F(1/2) = P(X \leq 1/2) = P(X=0) = 1/8$

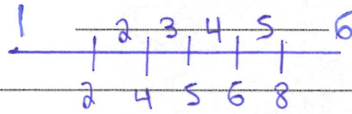
$F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$

$F(3/2) = P(X \leq 3/2) = P(X=0) + P(X=1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Υπολογισμός F από f

π.χ. $f(x) = \begin{cases} 0,1 & , x=2 \\ 0,3 & , x=4 \\ 0,2 & , x=5 \\ 0,3 & , x=6 \\ 0,1 & , x=8 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



Οι τιμές που η f(x) είναι θετική διαμερίζουν το πεδίο ορισμού της F

$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<2 \\ & , 2 \leq x < 4 \\ & , 4 \leq x < 5 \\ & , 5 \leq x < 6 \\ & , 6 \leq x < 8 \\ & , x \geq 8 \end{cases}$

- $F(2) = P(X \leq 2) = P(X=2) = f(2) = 0,1$

Για $2 \leq x < 4$, $F(x) = 0,1$

- $F(4) = P(X \leq 4) = P(X=2) + P(X=4) = f(2) + f(4) = 0,1 + 0,3 = 0,4$

Για $4 \leq x < 5$, $f(x) = 0,4$

Για να βρούμε τις τιμές σε κάθε διάστημα, προσθέτουμε τις τιμές της f(x) για x ≤ κάτω άκρο του διαστήματος

$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<2 \\ 0,1 & , 2 \leq x < 4 \\ 0,4 & , 4 \leq x < 5 \\ 0,6 & , 5 \leq x < 6 \\ 0,9 & , 6 \leq x < 8 \\ 1 & , x \geq 8 \end{cases}$

Ενδιάμεση Εξέταση: Κυριακή 10 Νοεμβρίου, 14:00-16:00
Χ°Δ 02, Β204, Β205, Β210

- Τυχαία μεταβλητή X
- Συνάρτηση πυκν. πιθαν.: $f(x)$ ή $f_X(x) = P(X = x)$
- » κατανομής: $F(x)$ ή $F_X(x) = P(X \leq x)$

Υπολογισμός f από F

Δίνεται:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0{,}1, & 2 \leq x < 4 \\ 0{,}4, & 4 \leq x < 5 \\ 0{,}6, & 5 \leq x < 6 \\ 0{,}9, & 6 \leq x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$$

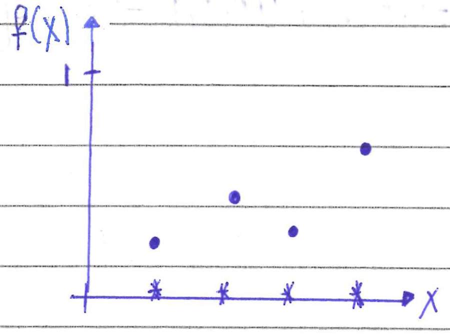
Να βρεθεί η $f(x)$

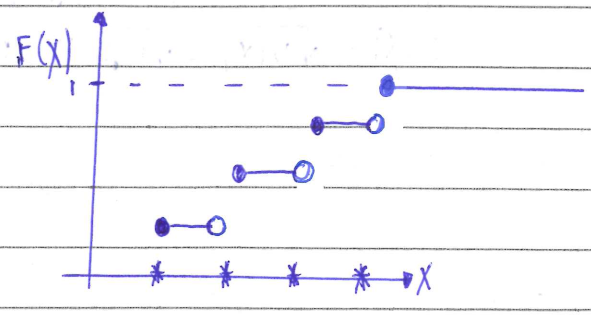
Η f είναι θετική (μη-μηδενική) στις τιμές που αλλάζει ο τύπος της F (σημεία ασυνέχειας)

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 - 0 = 0{,}1 & x = 2 \\ 0{,}3 & x = 4 \\ & x = 5 \\ & x = 6 \\ & x = 8 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σε κάθε τέτοια τιμή η $f(x)$ είναι ίση με τη διαφορά των τιμών της $F(x)$ στα δύο διαστήματα που συνορεύουν με το σημείο ασυνέχειας.

$f(2) = P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X < 2) = F(2) - 0 = F(2) = 0{,}1$
$f(4) = P(X=4) = P(X \leq 4) - P(X < 4) = F(4) - 0{,}1 = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$





Ιδιότητες της F

1) Μη φθίνουσα $P(X \leq x)$
2) $0 \leq F(x) \leq 1$
3) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
4) Από δεξιά συνεχής

Μέση τιμή και διασπορα τ.μ (τυχαίας μεταβλητής)

Εστω X διακριτή τ.μ

- Η πληθυσμιακή μέση τιμή $E(X)$ ή μ της X δίνεται από τον τύπο:
  $\mu = E(X) = \Sigma x_i f(x_i)$ (αν το άθροισμα υπάρχει)
- Η πληθυσμιακή διασπορά $V(X)$ ή σ^2 της X δίνεται από τον τύπο:
  $\sigma^2 = V(X) = \Sigma x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ (αν το άθροισμα υπάρχει)
- Η πληθυσμιακή τυπική απόκλιση σ της X είναι:
  $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$

π.χ Εστω η κατανομή της τ.μ X

X	0	1	2	3	4
f(x)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

α) Να βρεθούν οι $E(X), V(X), \sigma$
β) Να βρεθούν τα $F(2)$, $F(2,5)$, $P(X \geq 3)$

α) $E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = \boxed{2}$
$V(X) = 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,1 - 2^2 = \boxed{1,2}$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,2} \cong \boxed{1,095}$

45

β)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0{,}1 & 0 \le x < 1 \\ 0{,}3 & 1 \le x < 2 \\ 0{,}7 & 2 \le x < 3 \\ 0{,}9 & 3 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x \end{cases}$$

$F(2) = 0{,}7$, $F(2{,}5) = 0{,}7$

$P(x \ge 3) = 1 - P(X<3)$

$= 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = \boxed{0{,}3}$

Συμπλήρωμα

$E(x) = \Sigma x_i f(x_i)$

Ερμηνεία: αναμενόμενη τιμή

(τιμή που θα πάρει η X αν κάνουμε το πείραμα άπειρες φορές)

Μάθημα

X τ.μ

$E(X)$ = μέση τιμή = αναμενόμενη τιμή

Υπενθύμιση $F(x) = P(X \leq x)$

$P(X \leq a) = F(a)$

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

Παράδειγμα

Μια εταιρεία κάνει προσφορά για κατασκευή έργου. Αν αναλάβει το έργο θα πάρει €5000. Αν δεν το αναλάβει, θα χάσει 56€
Η πιθανοτ. ανάληψης έργου είναι 1/4
Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος;

- Έστω η τ.μ X = το κέρδος της εταιρείας

Τιμές της X	Πιθανότητα
5000	1/4
−56	3/4

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & x = 5000 \\ 3/4, & x = -56 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

=> Αναμενόμενο κέρδος $= E(X) = 5000 \cdot \frac{1}{4} + (-56) \cdot \frac{3}{4} = 1208$ €

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = c \cdot (2x-1)$ $x = 1, 2, 3, 4$

α) Να βρεθεί το c.
β) Να βρεθεί η $F(x)$
γ) Να υπολογιστούν: $P(X>2)$, $P(X<4)$, $P(2 \leq X \leq 3)$
δ) Να βρεθούν τα $E(X)$, $V(X)$, σ

Υπενθύμιση: $\sum f(x_i) = 1$

Πρέπει $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$
$c(2-1) + c(4-1) + c(6-1) + c(8-1) = 1 \Rightarrow 16c = 1$ $\boxed{c = 1/16}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/16, & x = 1 \\ 3/16, & x = 2 \\ 5/16, & x = 3 \\ 7/16, & x = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

β)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/16 & 1\le x<2 \\ 4/16 & 2\le x<3 \\ 9/16 & 3\le x<4 \\ 1 & 4\le x \end{cases}$$
(αθροίζουμε) (μέχρι το κάτω άκρο)

γ) $\bullet\ P(X>2) = 1-P(X\le 2)$
$1-F(2) = 1-4/16 = \boxed{12/16}$

$\bullet\ P(X<4) = P(X\le 3) = F(3) = \boxed{9/16}$

$\bullet\ P(2\le X\le 3) = (P(X\le 3 \text{ και όχι } X<2))$
$= P(X\le 3) - P(X<2)$
$= P(X\le 3) - P(X\le 1) = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \boxed{\frac{1}{2}}$

δ) $E(X) = \sum x_i f(x_i) = \frac{1}{16}\cdot 1 + \frac{3}{16}\cdot 2 + \frac{5}{16}\cdot 3 + \frac{7}{16}\cdot 4 = \boxed{\frac{25}{8}}$

$V(X) = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$
$= 1^2\cdot\frac{1}{16} + 2^2\cdot\frac{3}{16} + 3^2\cdot\frac{5}{16} + 4^2\cdot\frac{7}{16} - \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \boxed{\frac{55}{64}}$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{55/64} \cong \boxed{0,927}$

→ Πείραμα τύχης → Τυχαία μεταβλητή X → τιμή της X | πιθ → $f(x) = P(X=x)$
↓
$F(x) = P(X\le x)$