ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 - ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Μελετάμε τις άγνωστες παραμέτρους ενός πληθυσμού κάνοντας υποθέσεις για αυτές, τις οποίες ελέγχουμε με αντιπαράθεση.

π.χ Πάνω από το 60% των φοιτητών βάζουν ζάχαρη στον καφέ

Ελέγχουμε αυτή την υπόθεση με αντιπαράθεση με την αντίθετη:

"Το πολύ 60% των φοιτητών βάζουν ζάχαρη στον καφέ".

$p \leq 60\%$ VS $p > 60\%$

H_1: εναλλακτική υπόθεση (η υπόθεση που κάναμε)

H_0: μηδενική υπόθεση (η αντίθετη της άποψης που πιστεύουμε)

H_0 VS H_1

Πραγματικότητα / Απόφαση	H_1: αληθής	H_1: ψευδής
H_0: απορρίπτεται	✓	Σφάλμα τύπου I
H_0: δεκτή	Σφάλμα τύπου II	✓

Ο έλεγχος υπόθεσης επικεντρώνεται στο να κρατάει μικρή την πιθανότητα σφάλματος τύπου I

Ορολογία

1) Σφάλμα τύπου I: απόρριψη της H_0 ενώ η H_1 είναι ψευδής
2) Σφάλμα τύπου II: αποδοχή της H_0 ενώ η H_1 είναι αληθής
3) Επίπεδο σημαντικότητας α: μέγιστη πιθανότητα του σφάλματος τύπου I
4) β = πιθανότητα σφάλματος τύπου II
5) Ελεγχοσυνάρτηση: στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιούμε για τον έλεγχο
6) Χωρίο απόρριψης (ΧΑ) της H_0:
Το σύνολο τιμών της ελεγχοσυνάρτησης για τις οποίες απορρίπτεται η H_0
7) p-value: η μικρότερη τιμή του α για την οποία η H_0 απορρίπτεται.

Βήματα ελέγχου υποθέσεων

1) Διατύπωση υποθέσεων:
H_1: η υπόθεση που πιστεύουμε
H_0: η αντίθετη υπόθεση

2) Επιλογή ελεγχοσυνάρτησης: χρησιμοποιούμε τυχαίο δείγμα
3) Χωρίο απόρριψης της H_0: χρησιμοποιούμε το επίπεδο σημαντικότητας α
4) Απόφαση: Αν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης στο δείγμα ανήκει

στο χωρίο απόρριψης τότε η Ho απορρίπτεται. Διαφορετικά η Ho είναι δεκτή.

Α - Έλεγχος υποθέσεων για ποσοστό p σε μικρό δείγμα

Α1 - Μονόπλευρος έλεγχος

Μελετάμε το ποσοστό p των ατόμων ενός πληθυσμού που έχουν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό.

① $H_0: p \geq p_0$ $\quad H_1: p < p_0$ $\quad$ (p_0 γνωστό ποσοστό)
ή $H_0: p \leq p_0$ $\quad H_1: p > p_0$

② Ελεγχοσυνάρτηση
X = # ατόμων στο δείγμα που έχουν το χαρακτηριστικό
(Αν επιλέξουμε δείγμα μεγέθους n, $X \sim Bin(n,p)$)

③ Χωρίο απόρριψης της Ho

1η περίπτωση: $H_0: p \geq p_0$ $\quad H_1: p < p_0$

Θα έχει τη μορφή $X \leq c$ για κάποιον αριθμό c.

$P(\text{σφ. τύπου I}) \leq a$
$\Rightarrow P(H_0 \text{ απορρ.} / H_1 \text{ ψευδής}) \leq a$
$\Rightarrow P(X \text{ ανήκει στο ΧΑ} / H_0 \text{ αληθής}) \leq a$
$\Rightarrow P(X \leq c \mid X \sim Bin(n,p_0)) \leq a$
$\Rightarrow F_X(c) \leq a$

$X \sim Bin(n,p_0)$

$\Rightarrow$ Από τον πίνακα διωνυμικής βρίσκουμε το c

<u>2η περίπτωση:</u> $H_0: p \le p_0$ $H_1: p > p_0$

Το ΧΑ θα έχει τη μορφή $X \ge c$

$P(\text{σφ. τύπου I}) \le a$

$\Rightarrow P(H_0 \text{ απορρ.} / H_1 \text{ ψευδής}) \le a$

$\Rightarrow P(X \ge c / X \sim Bin(n, p_0)) \le a$

$\Rightarrow 1 - P(X < c / X \sim Bin(n, p_0)) \le a$

$\Rightarrow P(X < c / X \sim Bin(n, p_0)) \ge 1 - a$

$\Rightarrow P(X \le c-1 / X \sim Bin(n, p_0)) \ge 1 - a$

$\Rightarrow F_X(c-1) \ge 1 - a$

Από τον πίνακα διωνυμικής βρίσκουμε το c

(4) Απόφαση: Ελέγχουμε την τιμή στο δείγμα

<u>Π.χ</u> Πιστεύουμε ότι αυτοί που προτιμούν σοκολάτα γάλακτος είναι περισσότεροι από αυτούς που προτιμούν μαύρη σοκολάτα.

Επιλέγουμε δείγμα 18 ατόμων, όλοι εκτός από 2 προτιμούν γάλακτος. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η υπόθεσή μας είναι αληθής με επίπεδο σημαντικότητας $a = 0{,}05$;

p = ποσοστό ατόμων που προτιμούν σοκολάτα γάλακτος

Πιστεύουμε $p > 1/2$

<u>1) Διατύπωση υποθέσεων</u>

$H_0: p \le 1/2$ $H_1: p > 1/2$

2) <u>Ελεγχοσυνάρτηση</u>

X = # ατόμων στο δείγμα που προτιμούν σουβλάκια γάλακτος

3) <u>Χωρίο απόρριψης της H_0</u>

Θα έχει τη μορφή $X \geq c$ όπου

$P(X \leq c-1 \mid X \sim Bin(n, p_0)) \geq 1-a$

$P(X \leq c-1 \mid X \sim Bin(18, 1/2)) \geq 0,95$

$\Rightarrow c-1 = 12 \Rightarrow c = 13$

Χ.Α: $\boxed{X \geq 13}$

4) <u>Απόφαση</u>

Τιμή της X στο δείγμα: 16

Το 16 είναι στο ΧΑ

Άρα η H_0 απορρίπτεται

Μάθημα

Έλεγχος υποθέσεων

Α - Ποσοστό p σε μικρό δείγμα

Α1 - Μονόπλευρος έλεγχος

α) $H_0: p \geq p_0 \quad H_1: p < p_0$

ή

β) $H_0: p \leq p_0 \quad H_1: p > p_0$

Ελεγχοσυνάρτηση: X = # ατόμων στο δείγμα με το ζητούμενο χαρακτηριστικό

Χωρίο απόρριψης

Στο α) είναι $X \leq c$ όπου $P(X \leq c / X \sim Bin(n, p_0)) \leq a$

Στο β) είναι $X \geq c$ όπου $P(X \leq c-1 / X \sim Bin(n, p_0)) \geq 1-a$

β = P(σφάλμα τύπου II)

= P(H_0 δεκτή / H_1 αληθής)

Στο α) είναι $\beta = P(X > c / X \sim Bin(n, p_1))$ όπου p_1 δοσμένο

Στο β) είναι $\beta = P(X < c / X \sim Bin(n, p_1))$ όπου p_1 δοσμένο

Ισχύς ελέγχου = $1-\beta$

p-value: Η μικρότερη τιμή του a για την οποία η H_0 απορρίπτεται

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή της X στο δείγμα είναι x_0

Στο α) p-value $= P(X \le x_0 \,/\, X \sim Bin(n, p_0))$

β) p-value $= P(X \ge x_0 \,/\, X \sim Bin(n, p_0))$

* Η τιμή της p-value εξαρτάται από το δείγμα
* Πρακτικά: πιθανότητα να έχουμε τόσο ή πιο ακραίο δείγμα δεδομένης της H_0

<u>p-value</u>

H_0 δεκτή ← α → H_0 απορρ.

α

Παράδειγμα

Πιστεύουμε ότι λιγότερο από 20% των φοιτητών του ΠΜ χρησιμοποιούν λεωφορείο.
Να ελεγχθεί η άποψη με επίπεδο σημαντικότητας 5% αν σε δείγμα μεγέθους 25 μόνο ένα άτομο χρησιμοποιεί λεωφορείο.
Ποιο είναι το p-value του ελέγχου;

Υποθέσεις

p: ποσοστό φοιτητών που χρησιμοποιούν λεωφορείο

$H_0: p \ge 0{,}2 \quad H_1: p < 0{,}2$

Ελεγχοσυνάρτηση

$X = \#$ ατόμων στο δείγμα (μεγέθους 25) που χρησιμοποιούν λεωφορείο

<u>Χωρίο απόρριψης:</u> $X \le c$

όπου $P(X \le c / H_0) \le \alpha$

$\Rightarrow P(X \le c \,/\, X \sim Bin(25, 0.2)) \le 0{,}05 \quad \Rightarrow c = 1$

ΧΑ: $X \le 1$

Απόφαση

Τιμή της X στο δείγμα = 1 ($x \in X_A$)

=> Η Ho απορρίπτεται

p-value = $P(X \leq 1 / X \sim Bin(25, 0.2))$ $= \boxed{0{,}027}$

Τιμή της x στο δείγμα

p-value = 0,027

a=0,05

Παράδειγμα

Πιστεύουμε ότι περισσότεροι από το 30% των ανθρωπων που έκαναν αίτηση στο Survivor έχουν σύνδρομο ναρκισσισμού. Με a= 5% να ελεγχθει αυτή η αποψη αν η παραγωγή μας ενημέρωσε ότι ανάμεσα σε 20 υποψήφιους, 9 είχαν σύνδρομο ναρκισσισμού.

Ποιό είναι το p-value του ελέγχου

Υποθέσεις: p = ποσοστό υποψηφίων παικτών του Survivor με σύνδρομο ναρκισσισμού

• $H_0: p \leq 0{,}3$ • $H_1: p > 0{,}3$

X = # υποψηφίων στο δείγμα των 20 με σύνδρομο ναρκισσισμού

Χωρίο απόρριψης: $X \geq c$ όπου

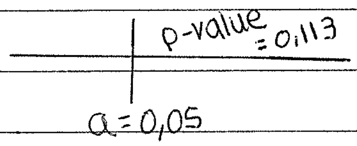
$P(X \leq c-1 / H_0) \geq 1-a$

$\Rightarrow P(X \leq c-1 / X \sim Bin(20, 0{,}3)) \geq 0{,}95$

$\Rightarrow c-1 = 9 \quad c=10 \quad \Rightarrow X_A: x \geq 10$

<u>Απόφαση</u>: Τιμή της X στο δείγμα $= 9$
$(x \notin XA)$
- Άρα H_0 δεκτή

<u>p-value</u> $= P(X \geq x_0 \,/\, X \sim Bin(n, p_0))$
$= P(X \geq 9 \,/\, X \sim Bin(20, 0{,}3))$
$1 - P(X < 9 \,/\, X \sim Bin(20, 0{,}3))$
$1 - P(X \leq 8 \,/\, X \sim Bin(20, 0{,}3)) = 1 - 0{,}887 = 0{,}113$

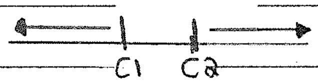


<u>Α2 - Αμφίπλευρος έλεγχος</u>

<u>Υποθέσεις</u>: $H_0: p = p_0 \quad H_1: p \neq p_0$
$(p_1 < p_0$ ή $p_1 > p_0)$
(πάντα η ισότητα στην H_0)

<u>Ελεγχοσυνάρτηση</u>: η ίδια με τον μονόπλευρο έλεγχο

<u>Χωρίο απόρριψης</u>: $X \leq c_1$ ή $X \geq c_2$



όπου $P(X \leq c_1 \,/\, X \sim Bin(n, p_0)) \leq a/2$
και $P(X \leq c_2 - 1 \,/\, X \sim Bin(n, p_0)) \geq 1 - \frac{a}{2}$

B $= P(c_1 < X < c_2 \,/\, X \sim Bin(n, p_1))$ όπου p_1 δοσμένο

<u>p-value</u> $= 2 \cdot \min \{ P(X \leq x_0 \,/\, X \sim Bin(n, p_0)),$
$P(X \geq x_0 \,/\, X \sim Bin(n, p_0)) \}$

Σύνοψη

Υποθέσεις	Χωρίο απόρριψης
$H_0: p \geq p_0,\ H_1: p < p_0$	$X \leq C$ όπου $P(X \leq C) \leq a$
$H_0: p \leq p_0,\ H_1: p > p_0$	$X \geq C$ όπου $P(X \leq C-1) \geq 1-a$
$H_0: p = p_0,\ H_1: p \neq p_0$	$X \leq C_1$ ή $X \geq C_2$ όπου $P(X \leq C_1) \leq a/2$ και $P(X \leq C_2 - 1) \geq 1 - a/2$

Μαθημα

Παράδειγμα

Ενα νόμισμα έχει πιθανότητα p να φέρει γράμματα (Γ). Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι $p = 1/2$ (δηλ. ότι το νόμισμα είναι δίκαιο). Το ρίχνουμε 10 φορές και έστω X ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται Γ.

α) Αν $a = 0,12$ να βρεθεί το Χ.Α

β) Αν $X = 2$, να αποφασίσετε αν δεχόμαστε την υπόθεση για $a = 0,12$. Το ίδιο για $a = 0,2$

γ) p-value = ; για $x = 1$ και $x = 3$

(δ) Με βάση την p-value, να γίνει ο έλεγχος με $a=0{,}05$, $a=0{,}35$ και $a=0{,}01$

(α) <u>Υποθέσεις</u>

$H_0: p=0{,}5 \quad H_1: p\neq 0{,}5$

<u>Χωρίο απόρριψης</u>: $X\le c_1$ και $X\ge c_2$ όπου
$P(X\le c_1|H_0)\le a/2$ και $P(X\le c_2-1/H_0)\ge 1-\frac{a}{2}$

$\Rightarrow P(X\le c_1 / X\sim Bin(10,0{,}5))\le 0{,}06 \quad c_1=2 \quad \boxed{c_1=2}$
και $P(X\le c_2-1/X\sim Bin(10,0{,}5))\ge 0{,}94 \quad c_2-1=7 \quad \boxed{c_2=8}$

Άρα Χ.Α: $X\le 2$ και $X\ge 8$

(β) $x=2\in$ Χ.Α $\Rightarrow$ Απορρίπτουμε την H_0

Για $a=0{,}2$ πάλι απορρίπτουμε γιατί $0{,}2>0{,}12$ *

(γ) p-value $=2\cdot\min\{P(X\le x_0), P(X\ge x_0)\}$

<u>Για $x=1$</u>: $P(X\le 1|H_0) = P(X\le 1 / X\sim Bin(10,0{,}5))=0{,}011$
: $P(X\ge 1/H_0)=1-P(X<1|H_0)=1-P(X\le 0 / X\sim Bin(10,0{,}5))$
$=1-0{,}001 \Rightarrow$ P-value $=2\cdot 0{,}011=\boxed{0{,}022}$
<u>Για $x=3$</u>: $P(X\le 3/X\sim Bin(10,0{,}5))= 0{,}172$
$P(X\ge 3 / X\sim Bin(10,0{,}5))=P(X\le 2/X\sim Bin(10,0{,}5))=1-0{,}055$
$\Rightarrow$ P-value $=2\cdot 0{,}172=\boxed{0{,}344}$
* Γενικά αν Ho απορρίπτεται για κάποιο α, απορρίπτεται για κάθε μεγ. α

δ) ← Ho δεκτή   Ho απορ. →

p-value → εξαρτάται από το δείγμα

	X=1	X=3
α=0,05	Ho απορ	Ho δεκτή
α=0,35	Ho απορ.	Ho απορρ.
α=0,01	Ho δεκτή	Ho δεκτή

<u>Παράδειγμα</u>

Πιστεύουμε ότι η πιθανότητα p να γεννηθεί αγόρι, διαφέρει από την πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι.
Επιλέγουμε δείγμα 18 γυναικών σε κύηση και έστω X ο αριθμός των αγοριών που γεννήθηκαν.
Γνωρίζουμε ότι το Χ.Α για τον έλεγχο Ho: $p = 1/2$ H1: $p \neq 1/2$ έχει τη μορφή $X \leq 5$ και $X \geq 13$

α) Ποια η πιθανότητα σφάλματος τύπου I;
α) Ποια η πιθαν. σφαλμ. τύπου II αν $p=0,6$;
γ) P-value αν $x=12$
δ) Με βάση την p-value, να γίνει ο έλεγχος για α=1%, 5% και 10%.

α) $P(\text{σφ. } \underset{\text{απορρίπτουμε λανθασμένα}}{\text{τύπου I}}) = P(\text{Ho απορρ.} \mid \text{Ho})$

$= P(X \leq 5 \text{ ή } X \geq 13 \mid X \sim Bin(18, 0,5))$

$\xRightarrow{\text{ξένα}} P(X \leq 5 \mid X \sim Bin(18,0,5)) + P(X \geq 13 \mid X \sim Bin(18,0,5))$

$= 0,048 + (1 - P(X \leq 12 \mid X \sim Bin(18,0,5))$

$= 0,048 + (1 - 0,952)$

$= 0,096$

(β) $P(\text{σφ. τύπου II}) = P(\text{Ho δεκτή} / p = 0{,}4)$
$= P(5 < X < 13 \mid X \sim Bin(18, 0{,}4))$
$= P(5 < X \leq 12 / X \sim Bin(18, 0{,}4))$
$= P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = 0{,}994 - 0{,}209 = \boxed{0{,}785}$

(γ) $p\text{-value} = 2 \cdot \min\{P(X \leq x_0), P(X \geq x_0)\}$
- $P(X \leq 12 \mid Ho) = P(X \leq 12 \mid X \sim Bin(18, 0{,}5))$
$= 0{,}952$

- $P(X \geq 12 \mid Ho) = P(X \geq 12 \mid X \sim Bin(18, 0{,}5))$
$= 1 - P(X \leq 11 / X \sim Bin(18, 0{,}5)) = 0{,}119$

Άρα $p\text{-value} = 2 \cdot 0{,}119 = \boxed{0{,}238}$

(δ) Και τα τρία ποσοστά είναι μικρότερα από την p-value
άρα δεχόμαστε την Ho

(≥ 30)
B – Έλεγχος υπόθεσης για μέση τιμή και ποσοστό σε μεγάλα δείγματα

π.χ $Ho: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$

Το Χ.Α θα έχει μορφή $\bar{X} \leq c$ $\left(\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$
όπου $P(X \leq c / Ho) \leq a$
$\Rightarrow P\left(X \leq c / X \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) \leq a$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \Big/ X \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) \leq a$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq a$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq a$$

$$\Rightarrow 1-\Phi\left(\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq 1-a \quad \Rightarrow \Phi\left(-\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq \Phi(z_a)$$

$$\Rightarrow -\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_a \quad \Rightarrow \boxed{\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_a}$$

Υποθέσεις	Χωρίο Απόρριψης	Ελεγχοσυνάρτηση
$H_0: p \geq p_0,\ H_1: p < p_0$	$Z \leq -z_a$	$Z = \dfrac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$
$H_0: p \leq p_0,\ H_1: p > p_0$	$Z \geq z_a$	
$H_0: p = p_0,\ H_1: p \neq p_0$	$\lvert Z \rvert \geq z_{a/2}$	
$H_0: \mu \geq \mu_0\ \ H_1: \mu < \mu_0$	$Z \leq -z_a$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
$H_0: \mu \leq \mu_0,\ H_1: \mu > \mu_0$	$Z \geq z_a$	s αν σ άγνωστο
$H_0: \mu = \mu_0,\ H_1: \mu \neq \mu_0$	$\lvert Z \rvert \geq z_{a/2}$	

Παράδειγμα

Σε μια εξέταση συμμετειχαν 1200 ατομα, από τα οποία 380 ήταν γυναίκες. Σε ένα δείγμα από 42 επιτυχόντες οι 18 ήταν γυναίκες.

Μπορούμε να ισχυριστούμε με $a = 5\%$ ότι το ποσοστό των γυναικών στους επιτυχόντες είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των γυναικών στον πληθυσμό;

p = ποσοστό γυναικών στους επιτυχόντες

$p_0 = \frac{380}{1200} = 31,07\%$ → $H_0 : p \leq 31,07\%$
↘ $H_1 : p > 31,07\%$

$$Z = \frac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\frac{18}{42} - 31,07\%}{\sqrt{\frac{31,07\%(1-31,07\%)}{42}}} = 1,56$$

Χωρίο απόρριψης : $Z \geq z_a$ όπου $z_a = z_{0,05} = 1,645$

άρα Χ.Α : $Z \geq 1,645$

$Z = 1,56$ δεν ανήκει στο ΧΑ => Ho δεκτή

B – Έλεγχος υποθέσεων, μεγάλο δείγμα (ο πίνακας

Παράδειγμα1

1200 άτομα , 380 γυναίκες
Δείγμα από 42 επιτυχόντες, οι 18 ήταν γυναίκες

i) $a = 0,05$ ποσοστό των γυναικών στους επιτυχόντες είναι > ποσοστό γυναικών στον πληθυσμό.

p = ποσοστό γυναικών στους επιτυχόντες

$H_0 : p \leq \frac{380}{1200}$ $H_1 : p > \frac{380}{1200}$

$$Z = \frac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = 1,56$$

ΧΑ: $Z \geq z_a \Rightarrow Z \geq z_{0,05} \Rightarrow Z \geq 1,645$

Απόφαση: Ho δεκτή

ii) p-value = ;

$$P(Z \geq 1,56 / H_0) = 1 - P(Z < 1,56)$$
$$= 1 - \Phi(1,56) = 1 - 0,9406 = 0,0594 = \boxed{5,94\%}$$

iii) 95% ΔΕ για ποσοστό των γυναικών στους επιτυχόντες

ΔΕ για p, μεγάλο δείγμα

$$\hat{p} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$\hat{p} \rightarrow \frac{x}{n}$

$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{18}{42}$, $z_{a/2} = z_{0,025} = 1,96$

⇒ Το ΔΕ είναι:

$$\frac{18}{42} \pm 1,96\sqrt{\frac{18/42\,(1-18/42)}{42}}$$

$$= [0,2789\ ,\ 0,5782]$$

Παράδειγμα 2

μέσος χρόνος αναμονής 4 λεπτά

τυπική απόκλιση 1 λεπτό

Δείγμα 50 πελατών → μέσος χρόνος αναμονής 3,5 λεπτά

i) $a = 5\%$ έλεγχος αν ο μέσος χρόνος αναμονής < 4 λεπτά

Έστω μ = μέσος χρόνος αναμονής

$H_0: \mu \geq 4$, $H_1: \mu < 4$

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{3,5-4}{1/\sqrt{50}} = -3,54$$

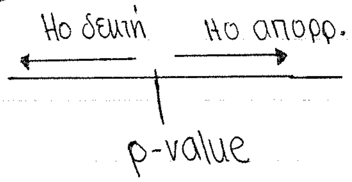
$$XA: Z \leq -z_a \Rightarrow Z \leq -z_{0,05} \Rightarrow Z \leq -1,645$$

Η τιμή της Z στο δείγμα ανήκει στο Χ.Α, άρα η Ho απορρίπτεται.

ii) p-value=;

$$p\text{-value} = P(Z \leq -3,54 \mid H_0) = \Phi(-3,54) = 1-\Phi(3,54) = 1-0,9998 = 0,0002 = \boxed{0,02\%}$$

iii) Να γίνει ο έλεγχος με $a=1\%$ και $a=0,03\%$.



$a=1\% > p\text{-value} \Rightarrow$ Ho απορρ.
$a=0,03\% > p\text{-value} \Rightarrow$ Ho απορρ.

Γ- Έλεγχος υποθέσεων για μέση τιμή κανονικού πληθυσμού, μικρό δείγμα

Πρέπει να δίνεται ότι ο πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή.

Αν το σ^2 είναι γνωστό: οι τύποι είναι όπως στο (Β)
Αν το σ^2 είναι άγνωστο:

$H_0: \mu \geq \mu_0,\ H_1: \mu < \mu_0$ — $T \leq -t_{n-1,a}$
$H_0: \mu \leq \mu_0,\ H_1: \mu > \mu_0$ — $T \geq t_{n-1,a}$
$H_0: \mu = \mu_0,\ H_1: \mu \neq \mu_0$ — $|T| \geq t_{n-1,a/2}$

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Παράδειγμα 3

κατά μέσο όρο < 50 €

44, 46, 62, 76, 39, 22, 37, 51, 14, 23, 84, 26

(i) Σημειακή εκτίμηση του μέσου μηνιαίου λογαριασμού που πληρώνουν οι συνδρομητές.

(εκτιμήτρια του $\mu \rightarrow \bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{44+46+\dots+26}{12} = \boxed{43,67}$$

(ii) 90% ΔΕ για τη μέση τιμή του πληθυσμού

ΔΕ για μ, άγνωστο σ^2, μικρό δείγμα

$$\bar{X} \pm t_{n-1,\,a/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$t_{n-1,\,a/2} = t_{11,\,0,05} = 1,796$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\Sigma x_i^2 - n \cdot \bar{X}^2\right) = \frac{1}{11}\left(44^2 + 46^2 + \dots + 26^2 - 12 \cdot 43,67^2\right)$$

$$= 474,47 \Rightarrow S \cong 21,78$$

Άρα το ΔΕ είναι:

$$43,67 \pm 1,796 \cdot \frac{21,78}{\sqrt{12}} = [32,38\ ,\ 54,96]$$

(iii) $a = 1\%$, να ελεγχθεί η υπόθεση της εταιρείας

$H_0: \mu \geq 50$

$H_1: \mu < 50$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{43,67 - 50}{21,78/\sqrt{12}} = -1,0068$$

ΧΑ: $T \leq -t_{n-1, \alpha}$ $\Rightarrow$ $T \leq -t_{11, 0{,}01}$

$\Rightarrow T \leq -2{,}718$

<u>Απόφαση</u>: Η τιμή της T στο δείγμα δεν ανήκει στο ΧΑ άρα η Ho δεκτή.

iv) $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu \neq 50$ ($\alpha = 1\%$)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = -1{,}0068$$

<u>ΧΑ</u>: $|T| \geq t_{n-1, \alpha/2} \Rightarrow |T| \geq t_{11, 0{,}05} \Rightarrow |T| \geq 3{,}106$

<u>Απόφαση</u>: Η τιμή του T στο δείγμα δεν ανήκει στο Χ.Α $\Rightarrow$ Ho δεκτή

(Αν Ho δεκτή στον μονόπλευρο, είναι δεκτή και στον αμφίπλευρο)

Συνέχεια μαθήματος

Έλεγχος υποθέσεων

A – p, μικρό δείγμα
B – μ, p μεγάλο δείγμα
Γ – μ, μικρό δείγμα

Έλεγχοι υποθέσεων με χρήση Δ.Ε

Όταν έχουμε αμφίπλευρο έλεγχο
π.χ $H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu \neq \mu_0$

με ε.σ α%. τότε μπορούμε να κάνουμε έλεγχο ως εξής:
επίπεδο σημαντικότητας

- Κατασκευάζουμε (1-α)% ΔΕ για μ
- Αν το μ_0 ανήκει στο ΔΕ τότε H_0 δεκτή
- Αν το μ_0 δεν ανήκει στο ΔΕ τότε H_0 απορρίπτεται (ίδιο για το p)

Απόδειξη

$$\mu_0 \in \Delta E \Rightarrow \mu_0 \in \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$-z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_0 < z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow -z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

$\Rightarrow -z_{a/2} < Z < z_{a/2}$

$\Rightarrow |Z| < z_{a/2}$

$\Rightarrow$ Z δεν ανήκει στο ΧΑ

Παράδειγμα 1

340, 300, 340, 320, 320, 290, 330, 320, 310

(i) ΔΕ για μ, άγνωστο σ^2, μικρό δείγμα

$\bar{X} \pm t_{n-1,\frac{a}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$ • $\bar{X} = \frac{340+300+\dots+310}{9} = \boxed{318{,}89}$

• $S^2 = \frac{1}{8}(340^2+\dots+310^2 - 9\cdot 318{,}89^2) = 286{,}11$

$\Rightarrow S \cong \boxed{16{,}915}$

• $t_{n-1,\frac{a}{2}} = t_{8,\,0{,}025} = 2{,}306$

Άρα: $318{,}89 \pm 2{,}306 \cdot \frac{16{,}915}{\sqrt{9}} = (305{,}89\ ,\ 331{,}89)$

(ii) Πρέπει να γνωρίζουμε ότι το δείγμα ή ο πληθυσμός ακολουθούν κανονική κατανομή.

(iii) $H_0: \mu = 320 \quad H_1: \mu \neq 320 \quad (a = 5\%)$

Εφόσον το 320 ανήκει στο 95% ΔΕ για το μ, δεχόμαστε την H_0

(iv) Το ίδιο για $a = 1\%$

Εφόσον το 99% ΔΕ είναι μεγαλύτερο από το 95% ΔΕ, το 320 θα ανήκει και σε αυτό. $\Rightarrow H_0$ δεκτή.

v) Το ίδιο για $a = 10\%$

Ελεγχοσυνάρτηση

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{318{,}89 - 320}{16{,}915/\sqrt{9}} = -0{,}19$$

ΧΑ: $|T| \geq t_{n-1, a/2} = t_{8, 0{,}05} \Rightarrow |T| \geq 1{,}86 \Rightarrow$ Ho δεκτή

Παράδειγμα 2

95% ΔΕ για μ: (23.871 , 25.969)

α) Μπορεί η $H_0: \mu = 25$ να απορριφθεί για χάρη της $H_1: \mu \neq 25$

i) $a = 5\%$ ΟΧΙ
ii) $a = 10\%$ ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ
iii) $a = 1\%$ ΟΧΙ (ναι ανήκει στο διάστημα)

β) $H_0: \mu = 20$, $H_1: \mu \neq 20$

i) $a = 5\%$ ΝΑΙ (δεν ανήκει)
ii) $a = 10\%$ ΝΑΙ
iii) $a = 1\%$ ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ

Δ - Έλεγχος υποθέσεων για 2 πληθυσμούς

Έχουμε 2 πληθυσμούς με άγνωστες παραμέτρους μ_1, μ_2 και p_1, p_2.
Κάνουμε έλεγχο υποθέσεων για $\mu_1 - \mu_2$ ή $p_1 - p_2$

Απαραίτητη προϋπόθεση: Οι πληθυσμοί ή τα δείγματα είναι ανεξάρτητα

Δ1 - Μεγάλα δείγματα

Υποθέσεις

(1)

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ $\quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ $\quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $\quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

(2)

$H_0: p_1 \geq p_2$ $\quad H_1: p_1 < p_2$
$H_0: p_1 \leq p_2$ $\quad H_1: p_1 > p_2$
$H_0: p_1 = p_2$ $\quad H_1: p_1 \neq p_2$

Ελεγχοσυνάρτηση

(1)

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

(S_1, S_2 αν σ_1, σ_2 άγνωστα)

(2)

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

όπου $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

X.A

(1)	(2)
$Z \leq -z_a$	$Z \leq -z_a$
$Z \geq z_a$	$Z \geq z_a$
$\lvert Z \rvert \geq z_{a/2}$	$\lvert Z \rvert \geq z_{a/2}$

Παράδειγμα 3

Έστω:

μ_1: μέσος καρδιακός παλμός θεατών Scream 1
μ_2: " " " " Scream 2

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{120 - 115 - 0}{\sqrt{\frac{4^2}{64} + \frac{9^2}{81}}} = 4,0826$$

ΧΑ: $Z \geq z_a = z_{0,05} \Rightarrow Z \geq 1,645 \Rightarrow H_0$ απορρίπτεται

Παράδειγμα 4

Έστω:

p_1 = ποσοστό αντρών που αγοράζουν αεροπ. εισιτηρ. διαδικτυακά
p_2 = " γυναικών " " " "

$H_0: p_1 \leq p_2, \quad H_1: p_1 > p_2$

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{200 \cdot 80/200 + 400 \cdot 140/400}{200 + 400} \boxed{\cong 0,37}$$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 1,19$$

ΧΑ: $Z \geq z_a = z_{0,05} \Rightarrow Z \geq 1,645 \not\Rightarrow H_0$ δεκτή

Δ2 - Μικρά δείγματα

Πρεπει να γνωρίζουμε ότι τα δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή.

Υποθέσεις

$H_0: \mu_1-\mu_2 \geq \delta_0$ $\quad H_1: \mu_1-\mu_2 < \delta_0$

$H_0: \mu_1-\mu_2 \leq \delta_0$ $\quad H_1: \mu_1-\mu_2 > \delta_0$

$H_0: \mu_1-\mu_2 = \delta_0$ $\quad H_1: \mu_1-\mu_2 \neq \delta_0$

Ελεγχοσυνάρτηση

Αν σ_1^2, σ_2^2 γνωστά, τότε:

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Αν σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα αλλά $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

Αν $0,5 \leq \frac{S_1}{S_2} \leq 2$, τότε υποθέτουμε ότι $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

ΧΑ

$T \leq -t_{n_1+n_2-2,a}$

$T \geq t_{n_1+n_2-2,a}$

$|T| \geq t_{n_1+n_2-2,a/2}$

Παράδειγμα 5

μ_1 = μέσος μισθός ποδοσφαιριστών

μ_2 = " " τραγουδιστών

Υποθέτουμε ότι ο μισθός ακολουθεί κανονική κατανομή και στους 2 πληθυσμούς

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

$0,5 \leq \frac{S_1}{S_2} = \frac{150}{170} \leq 2$ άρα υποθέτουμε ότι $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} = \frac{}{\sqrt{\frac{9\cdot 150^2 + 7\cdot 170^2}{10+8-2}}} \cong 1,194$$

<u>XA:</u> $T \geq t_{n_1+n_2-2,\ a} = t_{16,0,05} = 1,746$
$\Rightarrow T \geq 1,746 \Rightarrow H_0$ δεκτή

<u>Θέματα Ενδιάμεσης</u>

1) α)

Μονάδες	Δέκατα
1	3 4 6 7
2	0 6 7 7 9
3	0 3 3 4 4 8 9 9 9
4	4
5	6

β) Μέση τιμή $= \frac{1,3 + \ldots 5,6}{20} = 3,04$

Διάμεσος : $\frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{3,0 + 3,3}{2} = 3,15$

$$\left.\begin{array}{l} Q_1: 0,25\cdot 20 = 5 \Rightarrow \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{2+2,6}{2} = 2,3 \\ Q_2: \text{διάμεσος}: 3,15 \\ Q_3: 0,75\cdot 20 = 15 \Rightarrow \frac{x_{15}+x_{16}}{2} = \frac{3,8+3,9}{2} = 3,85 \end{array}\right\} \begin{array}{l} Q_3 - Q_1 \\ = 3,85 - 2,3 \\ = 1,55 \end{array}$$